

СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

САЧУК ЮРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТА ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОЇ**  
**ПІВПЛОЩИНИ З ПОКРИТТЯМ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

Прикладна метематика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Ю.В. Сачук

Науковий керівник

Максимук Олександр Васильович,

доктор фізико-математичних наук, професор

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

*Вчений секретар спеціалізованої*

*вченої ради*

*/Ясінський А. В./*

Луцьк – 2017

## АНОТАЦІЯ

*Сачук Ю.В.* Плоскі контактні задачі та зношування пружної півплощини з покриттям штампами канонічної форми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, 2017.

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено її зв'язок з науковими темами установи, в якій працює автор; сформульовано мету і задачі дослідження; охарактеризовано наукову новизну, достовірність та практичну цінність отриманих результатів та наведено дані про їх апробацію; вказано кількість публікацій за темою дисертації та особистий внесок здобувача у публікаціях, виконаних у співавторстві, описано структуру роботи.

У **першому** розділі наведено огляд наукових праць з механіки контактної взаємодії, що є близькими за напрямком до теми дисертації, як у вітчизняній, так і в закордонній літературі. Окреслено місце роботи серед сучасних досліджень з цієї проблематики та перспективи досліджень.

У **другому** розділі наведено вихідні співвідношення контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружною півплощиною без урахування зношування. Зроблена постановка плоских контактних задач для визначення контактного тиску, напружено-деформованого стану в пружній півплощині та отримано основне інтегральне рівняння задачі. Розв'язування рівняння було зведено до чисельно-аналітичного обчислення повних еліптичних інтегралів першого та третього роду.

Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації отриманих математичних моделей із використанням спеціальних функцій та засобів візуального відображення результатів (3D-зображення та лінії рівня). Досліджено особливості розподілу контактного тиску та напружень у пружній півплощині для різних областей контакту.

У **третьому** розділі розглянуті контактні задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. Побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Проаналізовано числові методи розв'язку таких рівнянь. Розвинута методика розв'язування рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Проаналізовано числові методи розв'язування узагальненої проблеми на власні значення та проведено їх порівняльний аналіз.

Для знаходження власних значень та векторів застосовано метод Холецького та QZ-факторизації. Проаналізовано теоретичну збіжність даних методів та числову зміну власних значень при збільшенні розмірностей вхідних матриць. Для перевірки правильності отриманих власних значень процедура розв'язування узагальненої задачі на власні значення була проведена в різних програмних засобах.

На основі отриманих власних значень проведено числові розрахунки контактного тиску. Розроблено алгоритм пошуку області контакту в будь-який момент часу при заданій силі притискання штампа. Для фіксованих моментів часу було знайдено області контакту при заданій початковій силі. Експериментально встановлено таку кількість членів ряду для контактного тиску, що похибкою можна знехтувати. Проведено аналіз особливості його розподілу для різних форм штампів. Побудовано графіки величини зношування в безрозмірних величинах для наперед заданих областей контакту при заданій сталій силі. Досліджено величину зношування при різних областях контакту для різних канонічних штампів.

У **четвертому** розділі досліджено контактну взаємодію жорстких тіл (штампів) канонічної форми з пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера із урахуванням зношування проміжного шару. Побудовано основне інтегро-диференціальне рівняння задачі для визначення контактного тиску між штампом і покриттям. Розвинуто методику розв'язування інтегро-диференціального рівняння із використанням поліномів Чебишова, яка зводить

задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для розв'язування рівняння було розвинуто покроковий алгоритм за часом. Згідно з алгоритмом, час роботи фрикційної пари зі зношуванням розбивається на малі відрізки часу та приймається припущення, що область контакту та контактний тиск є постійними на кожному проміжку. Проведено числові розрахунки контактного тиску для фіксованих областей контакту при змінних параметрах, таких, як жорсткість покриття та товщина пружного шару Вінклера, розрахунки розподілу контактного тиску в різні часові моменти. Чисельно для різних пар матеріалів досліджено час зношування покриття Вінклера для різних штампів при різних фізико-механічних та геометричних параметрах.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, пружна півплощина, штампи канонічної форми, сингулярні інтегральні рівняння, контактний тиск, еліптичні інтеграли, узагальнена проблема на власні значення, зношування матеріалу, поліноми Чебишова, покриття Вінклера, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння.

### ABSTRACT

*Sachuk Y.V.* Flat contact problems and the wear of an elastic half-plane with a canonical shape. – Qualifying scientific work on the manuscript.

Athetison the degree of Candidate of Science (PhD) on specialty 01.02.04 «Mechanics of Deformable Solids». – Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, 2017.

The significance of the subject of theses has been substantiated in the **introduction**, their connection with scientific subjects of the institution, where the author works has been indicated; the aim and the tasks of the research project have been formulated; the scientific novelty, the validity, practical value of received results and the information about their approbation have been revealed; the number of published works according to the subject of theses and the personal contribution of the *aspirant (PhD student)* have been demonstrated, the structure of the work has been described.

The overview of scientific works on the mechanics of contact interaction which are close to the dissertation's subject both in domestic and foreign literature have been

given in **the first chapter**. The place of research project among contemporary investigations on this issue and research prospects have been outlined.

The initial correlations of contact interaction stamps of canonical forms with elastic half-plane without taking into account the *wearing* have been given in **the second chapter**. The formulation of the plane contact problems for determining the contact pressure, stress-strain state in an elastic half-plane, and the basic integral equation of the problem have been obtained. The solving of the equation has been reduced to a numerical-analytic calculation of complete first-order and third-order elliptic integrals.

The schemes of calculations and program modules for realization of the received mathematical models using special functions and means of visual display of results (3D-image and level lines) have been constructed. The peculiarities of the distribution of contact pressure and intensity in the elastic half-plane for various contact areas have been investigated.

The contact problems about contact interaction stamps of canonical form with elastic half-plane taking into account the wearing of the material have been observed in **the third chapter**. A singular integro-differential equation for determining the contact pressure has been constructed. The numerical methods of the solution of such equations have been analyzed. Methodology of solving the equation has been developed, which reduces the problem to a generalized issue on its own meanings. The numerical methods of solving a generalized problem on their eigenvalues have been analyzed and their comparative analysis has been conducted.

To find eigenvalues and vectors the Kholetskiy method and QZ-factorization have been used. The theoretical convergence of the given methods and the numerical change of eigenvalues with the increase of dimensions of the input matrices have been analyzed. To verify the correctness of the obtained eigenvalues, the procedure for solving a generalized task for its own meanings has been conducted in various software tools.

Numerical calculations of the contact pressure have been conducted on the basis of the obtained eigenvalues. The algorithm for searching the contact area at any time

with a given compression force of a stamp has been developed. For fixed moments of time the contact areas have been found at the given primary power. The number of members in a row for contact pressure has been set experimentally that the error can be neglected. The analysis of its peculiarity of distribution for various forms of stamps has been conducted. The graphs of wear value in dimensionless quantities for the predetermined contact at a given steady force have been constructed. The wear value at different contact areas for different canonical stamps has been investigated.

The contact interaction of hard stamps of canonical form with elastic half-plane, protected with Winkler covering taking into account the wear of the intermediate layer has been investigated in **the fourth chapter**.

The main integro-differential equation of the problem for determining the contact pressure between the stamps and the covering has been constructed. The methodology of integro-differential equation solving using Chebyshev's polynomials has been developed, which reduces the problem to the system of linear algebraic equations. To solve the equation a step-by-step algorithm has been developed by time. According to the algorithm, the time of work of friction pair (пара) steam (випаровування) with wear is divided into small period of time and it is assumed that the contact area and contact pressure are constant at each interval. The numerical calculations of contact pressure for fixed contact areas at variable parameters, such as rigidity of covering and the Winkler's elastic layer thickness, the calculations of the distribution of contact pressure at different periods of time have been conducted. Numerically, for different pairs of materials the wearing time of Winkler's covering for different stamps has been investigated at different physical-mechanical and geometric parameters.

**Key words:** contact interaction, elastic half-plane, shapes of canonical form, singular integral equations, contact pressure, elliptic integrals, generalized problem on own values, wear material, Chebyshev polynomials, coating Winkler, singular integro-differential equations.

#### СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА:

1. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Аналіз напружено-деформівного стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів. *Математичні методи та фізико-*

*механічні поля*. 2014. Т. 57, №4. С. 162–167.

Te same: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. 220, No. 2. P. 204–212.

2. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. №20. С. 180–187.
3. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2015. №2. С. 70–80.
4. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №21. С. 205–212.
5. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №22. С. 117–124.
6. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58, №4. С. 136–140.
7. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: матеріали міжнар. наук. конф. (Львів, 21–25 травня 2013 р.)*. Львів, 2013. С. 72–73.
8. Сачук Ю.В. Контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми із пружним ізотропним півпростором. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 13–14 травня 2013 р.)*. Луцьк, 2013. С. 192–194.
9. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу.

- Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: наукові праці ІХ міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів, 2014. С. 281–283.
10. Сачук Ю.В. Еліптичні інтеграли в задачах математичного моделювання контактної взаємодії тіл. *Математика. Інформаційні технології. Освіта*: тези доповідей ІІІ міжнар. наук.-практ. конф. (Луцьк-Світязь, 6–8 червня 2014 р.). Луцьк-Світязь, 2014. С. 27–28.
  11. Сачук Ю.В. Застосування еліптичних інтегралів у задачі контактної взаємодії жорстких штампів різної форми із пружною півплощиною. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали VІІІ міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 14-15 травня 2014 р.). Луцьк, 2014. С. 340-342.
  12. Сачук Ю.В. Контактна взаємодія тіл з покриттями із штампами канонічної форми з урахуванням зношування матеріалу. *Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини*: тези доповідей міжнар. наук.-практ. конф. (Миколаїв, 17–19 вересня 2015 р.). Миколаїв, 2015. С. 74–75.
  13. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів із пружною півплощиною з покриттям. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015*: матеріали відкр. наук.-тех. конф. молодих науковців і спеціалістів (Львів, 20–22 жовтня 2015р.). Львів, 2015. С. 71–72.
  14. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружним півпростором зі зношуванням матеріалу. *Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях*: тези доповідей X межд. науч. конф. для молодых учёных (Харків, 24–25 квітня 2015 р.). Харків, 2015. С. 45–46.
  15. Сачук Ю.В. Математичні моделі із використанням узагальненої проблеми на власні значення. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали міжнар. наук. конф. (Рівне, 19–22 лютого 2015 р.). Рівне, 2015. С. 147.



16. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в контактних задачах зі зношуванням. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали ІХ міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 12–13 травня 2015 р.). Луцьк, 2015. С. 342–344.
17. Сачук Ю.В. Зношування пружної півплощини, захищеної шаром Вінклера штампами канонічної форми. *Сучасні проблеми термомеханіки*: зб.наук. праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів, 2016. С. 277–279. URL: <http://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016>

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	12
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ З МЕХАНІКИ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ.....	19
РОЗДІЛ 2 ЗАДАЧІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКИХ ШТАМПІВ З ПРУЖНОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ .....	37
2.1. Вихідні співвідношення контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружною півплощиною.....	38
2.2. Постановка та розв’язування плоскої контактної задачі.....	42
2.2.1. Методика чисельно-аналітичного обчислення еліптичних інтегралів..	49
2.2.2. Визначення контактного тиску.....	53
2.3. Дослідження умов переходу із пружної до пластичної зон.....	56
2.4. Дослідження напружено-деформованого стану в середині пружної півплощини .....	58
2.5. Висновки до другого розділу .....	65
РОЗДІЛ 3 КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ТІЛ З ПРУЖНОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ ЗІ ЗНОШУВАННЯМ МАТЕРІАЛУ .....	67
3.1. Постановка задачі. Основне сингулярне інтегро-диференціальне рівняння.....	68
3.2. Методика зведення розв’язку інтегрального рівняння до узагальненої проблеми на власні значення .....	70
3.3. Особливості розподілу контактного тиску при зношуванні пружної півплощини штампами канонічної форми.....	77
3.4 Висновки до розділу 3 .....	86
РОЗДІЛ 4 КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДЛЯ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ЗНОШУВАННЯ .....	89
4.1. Математична модель контактної взаємодії для системи жорсткий штамп – тонке покриття (шар Вінклера) – пружна півплощина.....	90
4.2. Метод розв’язування інтегро-диференціального рівняння контактної задачі зі зношуванням покриття .....	92
4.3. Зношування тонкого покриття пружної півплощини під дією жорстких різних за формою штампів .....	95

	11
4.3.1. Розподіл контактного тиску за механічними характеристиками при $t=0$ .....	96
4.3.2. Розподіл контактного тиску за часом та просторовою координатою. ..	99
4.4 Висновки до розділу 4 .....	104
ВИСНОВКИ.....	106
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	108
ДОДАТКИ.....	127

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Проблема контактної взаємодії різних за формою пружних тіл залишається головною при розрахунках надійності роботи фрикційних з'єднань та контактних пар. Дослідження таких процесів взаємодії достатньо якісно описується за допомогою апарату механіки контактної взаємодії в рамках лінійної теорії пружності. Для більшості плоских контактних задач для систем жорсткий штамп – пружна півплощина, відомі математичні моделі розглядають взаємодію тіл за достатньо малої області контакту. Це дає змогу моделювати гладкий штамп параболою. Однак, в інженерній практиці часто зустрічаються випадки, де таке наближення не дає можливості адекватно оцінити реальну ситуацію. Тому актуальною є розробка та дослідження математичних моделей контактної взаємодії жорстких штампів різної канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною. Розв'язування задач такого типу, що зводяться до знаходження аналітичних розв'язків сингулярних інтегральних рівнянь, які виражаються через еліптичні інтеграли першого і третього роду із використанням відомих математичних методів. Проте, на даний час не існує добре збіжних методів обчислення еліптичних інтегралів третього роду при різних вхідних параметрах на всьому діапазоні їх значень, зокрема, при великих областях контакту.

В рамках цих досліджень важливим є визначення напружено-деформованого стану (місць концентрації напружень в середині півплощини, зокрема  $\tau_{\max}$ ) на основі відомих розподілів контактного тиску. Використовуючи теорію найбільших дотичних напружень, можна визначити точки переходу до пластичних зон та оцінити їх величину, що можна використати при дослідженні контактних задач зі зношуванням для визначення величини та швидкості зношування.

Практично невирішеною є проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар і визначення допустимої величини зношування контактуючих

поверхонь, за якої працюючий механізм не вийде з ладу. При розв'язуванні контактних задач із урахуванням зношування необхідно враховувати низку специфічних особливостей: зміну області контакту від просторових координат і часу, залежність розподілу контактного тиску від форми контактуючих тіл, моделі зношування, фрикційний розігрів і т.п.

Для розв'язування задач такого типу застосовується метод розділення змінних та ортогональні поліноми Чебишова. Поставлена задача зводиться до розв'язування узагальненої проблеми на власні значення. В теорії матриць практичним інструментом вирішення узагальненої проблеми на власні значення є застосування наближених чисельних методів із урахуванням фізико-механічних параметрів вихідної задачі. Тому розв'язування таких задач є основним аспектом розвитку аналітико-числових методик у механіці контактної взаємодії.

У промисловості з метою оптимізації витрат щодо експлуатації та відновлення деталей машин і механізмів використовують різні способи та методи захисту від пошкодження та руйнування їх в процесі роботи. Одним із основних способів є застосування захисних покриттів у вигляді тонких накладок, напилень і пружних шарів. Для моделювання процесу роботи деталей із нанесеними на них тонкими покриттями в якості теоретичного узагальнення пружного шару часто використовується покриття Вінклера із одним або двома коефіцієнтами постелі. При розв'язуванні контактних задач для тіл з покриттями шар Вінклера дозволяє вивчити вплив товщини, жорсткості захисного шару на величину та особливості розподілу контактного тиску. Удосконалення методик розв'язування таких рівнянь із використанням поліномів Чебишова є актуальною прикладною задачею в даний час.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки: “Нові складні халькогеніди та галогеніди для нелінійної оптики, термо- та оптоелектроніки: синтез, структура і властивості” (номер державної реєстрації 0117U002303, 2017-2019 рр.) та “Екстремальні задачі теорії наближення у

функціональних просторах” (номер державної реєстрації 0117U002304, 2017-2019 рр.).

**Мета і задачі дослідження.** Дослідити напружено-деформований стан у тілі під дією жорстких різних за формою штампів. Визначити особливості зношування півплощини штампами канонічної форми для змінних областей контакту. Дослідити вплив покриття Вінклера на розподіл контактного тиску за часом та просторовою координатою і зношування покриття. Досягнення мети передбачає:

- розвиток методики розв’язування задач контактної взаємодії жорстких штампів з пружною півплощиною шляхом зведення їх до сингулярних інтегральних рівнянь з подальшим використанням повних еліптичних інтегралів третього роду;

- дослідження і застосування основних методів знаходження наближених значень повних еліптичних інтегралів третього роду при вхідних параметрах на всьому діапазоні їх значень;

- постановку контактних задач зі зношуванням на основі моделі абразивного зношування та побудову ключових інтегро-диференціальних рівнянь;

- розробку методик розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь, що зводять задачу до узагальненої проблеми на власні значення та використання наближених методів розв’язування узагальненої проблеми на власні значення;

- розвиток методики розв’язування плоских контактних задач із покриттям Вінклера з одним коефіцієнтом постелі для штампів канонічної форми у тому числі зі зношуванням матеріалу;

- вивчення особливостей зношування півплощини та покриття Вінклера штампами різної форми у фіксовані моменти часу, при різних фізико-механічних характеристиках покриття та півплощини.

**Об'єкт дослідження** – контактна взаємодія пружної півплощини та півплощини, захищеної покриттям, із штампами різної канонічної форми, у тому числі зі зношуванням матеріалу.

**Предмет дослідження** – напружено-деформований стан пружної півплощини, процеси зношування півплощини або тонкого покриття півплощини.

**Методи дослідження.** В дисертації застосовувались:

- метод сингулярних інтегральних рівнянь;
- методи наближеного обчислення інтегралів, метод інтегралів Карлсона;
- метод розділення змінних;
- метод ортогональних поліномів Чебишова;
- метод Холецького, метод QZ-факторизації;
- ітераційні методи розв'язування узагальненої проблеми на власні значення;
- методи розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь.

**Наукова новизна одержаних результатів:**

- отримано розв'язки контактних задач про взаємодію жорстких штампів канонічної форми з пружною півплощиною, півплощиною, захищеною покриттям, у тому числі задачі із урахуванням зношування;
- розроблено методику побудови наближеного розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь першого роду, яка зводить їх до обчислення повних еліптичних інтегралів третього роду за допомогою інтегралів Карлсона;
- розвинуто методику зведення інтегральних рівнянь для контактних задач зі зношуванням матеріалу до узагальненої проблеми на власні значення та обчислення їх за методом Холецького і QZ-факторизації;
- запропоновано алгоритм знаходження областей контакту для задачі про зношування тіла жорсткими штампами для будь-яких моментів часу роботи фрикційної пари;
- розвинуто методику розв'язування сингулярного інтегро-дифференціального рівняння із використанням поліномів Чебишова, яка зводить контактну задачу про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною захищеною покриттям Вінклера, до системи лінійних алгебричних рівнянь;

- досліджено вплив співвідношень фізико-механічних властивостей покриття і основи на розподіл контактного тиску між штампом та покриттям;
- проведено розрахунки компонент напружень в півплощині із подальшим використанням отриманих значень для визначення точок межі текучості та оцінку їх величини для різних пар матеріалів;
- виявлено особливості зношування покриття штампами різної форми при різних областях контакту;
- запропоновано методика визначення величини зношування у фіксований момент часу в довільній точці області контакту.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати досліджень контактної взаємодії різних штампів із пружною півплощиною можуть використовуватись для визначення характеру розподілу та величини компонент напружено-деформованого стану в тілі залежно від геометричних і механічних параметрів фрикційної пари.

Запропоновані та розвинуті методики розв'язування задач контактної взаємодії про зношування пружної півплощини та тонкого покриття можуть бути ефективно використані для встановлення якісних та кількісних закономірностей впливу геометричних, фізико-механічних характеристик тіл, що контактують, на контактну жорсткість і зносостійкість конкретних вузлів тертя.

**Достовірність одержаних результатів** забезпечується строгістю математичних постановок задач контактної взаємодії із використанням основних співвідношень теорії пружності; використанням обґрунтованих та збіжних аналітико-числових математичних методів до розв'язування отриманих інтегральних та інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь; узгодженням отриманих чисельних результатів із теоретичними частковими випадками описаними у науковій літературі.

#### **Особистий внесок здобувача.**

Основні результати дисертації отримані здобувачем самостійно. Роботи [86, 89, 120-122, 127, 129] виконані у співавторстві з науковим керівником, професором О. В. Максимуком. Праці [123-126, 128, 130-134] опубліковано



автором одноосібно.

У спільних роботах автору належить участь у формулюванні та постановці задач, розробка алгоритмів та їх програмно-чисельна реалізація, проведення числових експериментів та формулювання висновків. Науковому керівнику належать визначення напрямку досліджень, математична постановка задач та вибір методів їх розв'язування, участь в обговоренні результатів та формулюванні висновків.

**Апробація результатів.** Основні положення і результати дисертації доповідались і обговорювалися на:

- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2013),
- VII Міжнародній науково-практичній конференції “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень” (Луцьк, 2013),
- VIII Міжнародній науково-практичній конференції “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень” (Луцьк, 2014),
- IX Міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2014),
- III Міжнародній науково-практичній конференції “Математика. Інформаційні технології. Освіта” (Луцьк-Світязь, 2014),
- Міжнародній науково-практичній конференції “Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини” (Миколаїв, 2015),
- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015),
- X международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” (Харків, 2015),
- IX Міжнародній науково-практичній конференції “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень” (Луцьк, 2015),

- Відкритій науково-практичній конференції молодих науковців і спеціалістів “Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015” (Львів, 2015),
- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми термомеханіки” (Львів, 2016).

Дисертація в цілому розглядалася на науковому семінарі відділу моделювання композитних структур і складних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М. В. Марчука та на загальноінститутському науковому семінарі “Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ” під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Г. С. Кіта (м. Львів, 2017 р.); на спільному науковому семінарі кафедри експериментальної фізики та інформаційно-вимірювальних технологій Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки та кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету під керівництвом д.ф.-м.н., проф. С. А. Федосова (м. Луцьк, 2017 р.); на науковому семінарі кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету під керівництвом д.т.н., проф. В. І. Швабюка (м. Луцьк, 2017 р.); на науковому семінарі “Математичні проблеми механіки” Одеського національного університету імені І. І. Мечникова під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н. Д. Вайсфельд (м. Одеса, 2017 р.).

**Публікації.** За матеріалами дисертаційного дослідження опубліковано 17 наукових праць [86, 89, 120-134], зокрема 6 статей [120-122, 127, 129, 133] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України та 11 тез доповідей у збірниках праць наукових конференцій [86, 89, 123-126, 128, 130-132, 134]. Праці [120, 122] опубліковані в журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 46 рисунків, висновків, списку літератури із 200 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 129 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 107 сторінок.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ З МЕХАНІКИ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

У процесі експлуатації конструкцій та різних деталей механізмів при їх фрикційній взаємодії між собою тіла піддаються зношуванню та руйнуванню. Тому для забезпечення їх максимальної довговічності та надійності роботи необхідним є розрахунок міцності елементів та оцінка надійності й прогнозування ресурсу їх роботи. Ці та інші фізико-механічні властивості деталей вивчаються в процесі дослідження та аналізу напружено-деформованого стану.

Дослідження напружено-деформованого стану та розв'язування перших класичних контактних задач було розпочато у працях Г. Герца, Ж. Буссінеска, Б. Г. Галеркіна. Контактним задачам присвячені роботи В. М. Александрова, В. А. Бабешка, М. М. Беляєва, Е. Д. Брауна, Н. Д. Вайсфельд, І. І. Воровича, Л. О. Галіна, Д. Н. Гаркунова, І. Г. Горячевої, Д. В. Гриліцького, О. М. Динника, В. А. Доценка, Ю. Н. Дроздова, О. О. Євтушенка, І. В. Крагельського, В. Д. Кузнецова, А. Г. Кузьменка, О. В. Максимука, Р. М. Мартиняка, Ю. В. Мільмана, М. І. Мусхелішвілі, С. М. Мхітаряна, Р. Д. Мідліна, М. І. Пашечка, Б. Л. Пелеха, Г. Я. Попова, А. І. Свириденка, Г. О. Сіренка, Д. Тейлора, М. І. Теплового, К. В. Фролова, М. Хебди, М. М. Хрущова, М. В. Чернеця, А. В. Чичинадзе та ін.

Першими роботами в галузі контактної механіки є роботи Г. Герца, основні результати яких наведені в роботах [6, 114]. Г. Герцом було розроблено загальну теорію контакту пружних тіл із гладкою поверхнею. З огляду на те, що області контакту є достатньо малими в порівнянні із радіусами кривизни контактуючих тіл та з розмірами самих же тіл, їх поверхні в околі початкової точки контакту справедливо були замінені відповідними поверхнями другого порядку. Звідси можна зробити висновок, що область контакту має форму еліпса, відношення півосей якого можна легко знайти, знаючи кривизну поверхонь тіл в початковій точці контакту.

До перших робіт з механіки контактної взаємодії також відноситься робота Ж. Буссінеска, основні результати якої наведені в монографії [43]. Використовуючи введені ним потенціали, Ж. Буссінеск отримав розв'язок задачі для пружного півпростору, на межі якого в круговій області діє нормальне навантаження. Також Ж. Буссінеском було розв'язано контактну задачу про вдавлювання кругового штампа в пружний півпростір.

Класичними результатами при розв'язуванні контактних задач аналітичними методами є роботи І.Я. Штаєрмана [160], М.І. Мусхелішвілі [101, 102], Л.А. Галіна [30]. Цими авторами було розглянуто та розвинуто методи інтегральних рівнянь, які становлять основу при розв'язуванні контактних задач про вдавлювання жорстких штампів в пружну півнескінченну область.

У роботі Л.О. Галіна [31] була розв'язана контактна задача про вдавлювання штампа еліптичної форми в пружний півпростір. Розв'язок цієї задачі був знайдений у вигляді зв'язку сил та моментів, автор встановив залежність між контактним тиском та формою основи штампа. Варто відмітити, що І.Я. Штаєрманом у монографії [160] були узагальнені роботи А.Н. Динника, Н.М. Беляєва та досліджено осадку під штампом, виявлено області найбільших контактних напружень для еліптичного штампа та показано способи приведення деяких еліптичних інтегралів до канонічного вигляду. У роботах [3, 44, 45] В.М. Александровим та В.І. Довноровичем було досліджено контактний тиск під штампом еліптичної форми і для знаходження коефіцієнтів полінома, який описує форму штампа, задача була зведена до системи лінійних алгебричних рівнянь. Також у роботі [3] цими вченими були розроблені ефективні асимптотичні методи, що дозволяють знаходити розв'язок задачі для пружного шару скінченної товщини.

М.Я. Леонов у статті [79] для контактної задачі про круговий штамп отримав розв'язок інтегрального рівняння у замкненій формі при відомих лише переміщеннях. Інші дослідження в напрямку використання інтегральних рівнянь наведені в роботі С.Г. Михліна [97], зокрема, автором наведені різні типи інтегральних рівнянь, в тому числі, сингулярних та запропоновані способи їх

розв'язання. У другій частині роботи розглядаються прикладні застосування інтегральних рівнянь в задачах про вдавлювання жорсткого штампа в пружну півплощину і розглянуто випадок для декількох штампів. Фундаментальними роботами в напрямку використання сингулярних інтегральних рівнянь в теорії пружності є роботи Н.И. Мусхелішвілі. В роботі [102] викладаються теорія і приклади конформного відображення і перетворення рівнянь плоскої задачі і граничних умов. В роботі [101] автором викладається математичний апарат інтегралів Коші і сингулярних рівнянь та їх застосування до розв'язуванню задач теорії потенціалу і теорії пружності. У роботі [81] И.К. Лифановим розглядається процес зведення плоскої контактної задачі до інтегрального рівняння з ядром Гільберта, який показує таке зведення та розв'язок задачі про вдавлювання пари штампів в пружну півплощину. У монографії В.Л. Рвачова [117] висвітлені дослідження контактних задач, характерною особливістю яких є поєднання алгебричних методів кібернетики за допомогою R-функцій із методами теорії рівнянь в частинних похідних.

В.М. Александров у роботах [5, 6] розглядає статичні і динамічні контактні задачі теорії пружності для неоднорідних тіл і контактні задачі з ускладненими умовами в зоні контакту. Для цих задач показано аналітичні методи розв'язування парних рядів-рівнянь, інтегральних рівнянь і нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь. В праці [38] О.В. Грабко описано деякі ітераційні процеси для розв'язання статичної задачі про контакт пружних шорстких тіл.

Оглядом в напрямку механіки контактної взаємодії є робота [146]. Авторами проведено огляд основних напрямків дослідження напружено-деформованого стану при вдавлюванні кінцевого штампа. Показано переваги і недоліки способів визначення основних параметрів. Описано проблему застосування кінцевого штампа при діагностуванні залишкових напружень. В статті [147] А. Ф. Улітком та В.І. Остриком розглянуто осесиметричну задачу про контактну взаємодію жорсткого конуса та пружного півпростору з урахуванням тертя і часткового зчеплення в області контакту. Узагальненим методом Вінера-Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено радіуси області контакту

та зони зчеплення, розподіл контактних напружень. В роботі [107] В.І. Остриком розглянуто просторові контактні задачі для еліптичного штампа з пружним півпростором, причому розв'язки були виражені через повні еліптичні інтеграли першого, другого та третього роду.

В монографії [189] наведено точні розв'язки контактних задач в рамках “напівпросторових наближень”, розглянуто класичну контактну задачу нормального контакту між жорсткою сферою і пружним півпростором. Досліджено контактні задачі для конусоподібного штампа та пружного півпростору. Схожа контактна задача розглянута в роботі [17], зокрема, в статті розглянуто контактну задачу про вдавлювання сферичного штампа в пружну півплощину. Для розв'язування задачі було використано метод Ньютона-Рафсона. Для конкретних матеріалів і фактичних значень коефіцієнта тертя отримано залежності, що визначають уточнені характеристики контактної взаємодії одиничної моделі мікронерівності в умовах пружно-пластичної деформації.

У [1] описано процес моделювання взаємодії фрикційного контакту для функціонально-градієнтних матеріалів, описано аналітичний метод для розв'язуванням контактних задач для функціонально-градієнтного шару складної структури, за яким контактний тиск пропонується побудувати у вигляді дробово-раціональної функції.

У роботі А.А. Калякіна [50] розглянута плоска і осесиметрична контактні задачі для тришарового пружного півпростору. Плоска задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння першого роду, наближений розв'язок якого отримано за допомогою модифікованого методу колокації Мультиппа-Каландія. У роботі [23] авторами розглянуто теореми існування власних значень і власних функцій однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наведено деякі відомості про чисельні методи теорії інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь.

У статті [12] автором розглядаються нові алгоритми обчислення повних еліптичних інтегралів першого і другого роду, а також деяких пов'язаних з ними функцій. Алгоритми побудовані на основі швидко збіжних статичних рядів.

Великий внесок у напрямку розв'язування контактних задач зробив академік В.Д. Кубенко [66-70]. Автором досліджуються процеси нестационарного деформування пружної півплощини під впливом твердого тіла (штампа). Для розв'язування цих задач використовуються інтегральне перетворення Лапласа для часової змінної, перетворення Фур'є для просторових змінних. Досліджено процес ударної взаємодії твердого циліндричного тіла з поверхнею циліндричної порожнини. Розв'язування сформульованої нестационарної змішаної крайової задачі з невідомою границею зведено до спільного розв'язування нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду і диференціального рівняння руху тіла.

Вагомий внесок у розвиток трибомеханіки також вніс А.Г. Кузьменко. Автором в роботах [71-73] досліджено нові методи розв'язування задач контактної трибомеханіки, зокрема, метод алгебричних рівнянь, варіаційно-експериментальний метод. Автором запропоновано новий метод розв'язування квазігерцевських задач як без урахування, так і з урахуванням зношування. У роботах [37, 56, 92-94, 137, 153] Р.М. Мартиняком та ін. проведено дослідження контактної взаємодії для пружних півпросторів, тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів та механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок. В статті [57] Г.С. Кітом та Б.Є. Монастирським розглянуто контактну задачу для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою, а в роботі [54] автори Г.С. Кіт та О.В. Максимук досліджують контактні задачі для тонкостінних елементів конструкцій із використанням інтегральних рівнянь Вольтера.

Дослідженням контактних задач, для різних штампів також займається О.В. Нахайчук. В роботі [104] автором представлені результати комплексного дослідження процесу вдавлювання плоского штампу в жорстко-пластичний матеріал із застосуванням різних методів, включаючи метод кінцевих елементів, проведена оцінка ступеня використання пластичності найбільш деформованих елементів в залежності від геометричних і силових факторів. В статті [105] О.В. Нахайчуком розглянута задача вдавлювання індентора заокругленої форми в

пластичний півпростір. У працях [20, 21] Н.Д. Вайсфельд розглянуто контактні задачі про взаємодію пружного циліндра із жорсткою перешкодою, а в роботах [19, 22] автор досліджує напружений стан для зрізаного конуса та розглядає осесиметричну задачу теорії пружності для кругового конуса. В статті [77] Р.М. Кушніром та ін. проведено аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл. В праці [78] Р.М. Кушніром розглянуто методи розрахунку напруженого стану та міцності твердих деформівних тіл з концентраторами напружень. В статті [133] Г.Т. Сулимом та Я.С. Пастернаком проведено розрахунки концентрації напружень та досліджено деякі ефективні механічні характеристики пластинок.

У роботі [108] О.І. Панчук, Г.В. Габрусєва, Б. Г. Шелестовський досліджують контактну взаємодію для штампа складної конфігурації, зокрема, для кільцево-параболоїдного штампа. Дослідниками отримано формули для визначення напружень, які виникли у півпросторі внаслідок дії штампа та знайдено точки досягнення максимальних напружень у зоні контакту двох тіл.

У роботі [82] запропоновано чисельний підхід до розв'язування задач контактної взаємодії і руйнування пружно-деформованих тіл. Взаємодія берегів тріщин, включаючи сили тертя і контактний тиск, моделюється за допомогою контактних скінченних елементів рамного типу з використанням методу покрокового аналізу.

У статті [65] розглянута задача про деформування елемента під дією жорсткого штампа. В роботі запропонований підхід до вирішення контактної задачі шляхом включення в систему рівнянь методу скінченних елементів апроксимації контактної поверхні, наведено приклад розрахунку в пружній постановці для лінійного трикутного елемента.

Важливим напрямком у контактній механіці, який активно розвивається, є задачі з урахуванням тертя і зношування. Теорія тертя й зношування потребує надійних методів розрахунку контактних вузлів. Практично невирішеною є проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар і визначення допустимої величини зношування контактуючих поверхонь, за якої працюючий



механізм не вийде з ладу. Проведення експериментальних досліджень в цьому напрямку є дуже трудомістким і дороговартісним. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є побудова математичних моделей процесів тертя і зношування із використанням досягнень механіки контактної взаємодії.

Основним параметром, який визначає роботу фрикційної пари, є контактний тиск, тому побудова співвідношень, що дозволяють визначити контактний тиск, є основою математичних моделей. Як правило, це є інтегральні рівняння, але на відміну від інтегральних рівнянь задач класичної контактної механіки у задачах із урахуванням зношування, необхідно враховувати низку специфічних особливостей: зміну області контакту від просторових координат і часу, залежність розподілу контактного тиску від форми тіл, модель зношування, фрикційний розігрів і т.п.

Розвиток математичного моделювання процесів тертя та зношування пов'язаний із роботами І.Г.Горячевої, Ю.О. Градиського Б.І. Костецького, І.В. Крагельського, О.В. Кубенка, В.Н. Литвинова, А.Ю. Коцюби, Б.Л. Пелеха, В.Л. Попова, И.М. Коровайчука, Г.М. Розенבלата, С.В. Лавренчука, А.В. Закалова, О.В. Максимука, Н. К. Мишкина, В.И. Острика, Г.П. Шпенькова, J.R. Barber.

У роботі [31] Л.О. Галіним показано розв'язок контактних задач за наявності зносу, що зводяться до однорідних рівнянь Фредгольма, а також розв'язано контактні задачі для шорстких тіл, що зводяться до нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна.

І.В. Крагельським у роботі [63] здійснена класифікація фрикційних зв'язків, на основі яких автор розглядає процеси тертя та зношування. Автором розглянуто критеріальні співвідношення для визначення області конкретного виду фрикційного зв'язку; достатньо чітко описано адгезійно-деформаційна теорія; розглянуто методи та установки для проведення експериментів на зношування матеріалів; описано деякі фрикційні та анти-фрикційні матеріали. У праці [64] І.В. Крагельським викладено основні процеси контактної взаємодії твердих тіл при зовнішньому терті і зношуванні; наведено відомості про зближення шорсткуватих тіл, площі контакту, попередньому зміщенні, граничному терті; викладено методи

розрахунку зносу деталей машин, зубчастих передач, кулачкових механізмів, ущільнень, фрикційних муфт; дано методи визначення параметрів шорсткості, необхідних для розрахунку тертя і зношування. Варто відмітити, що у роботі [80] В.Н. Литвинов одержав експериментальні результати, отримані в процесі дослідження взаємодії пари мідний сплав-сталь, результати дозволили змоделювати процес взаємодії в рамках дифузійної моделі.

У роботі [144] М.М. Тенненбаумом розглянуто основи теорії абразивного зношування і оцінки зносостійкості матеріалів і деталей машин; закономірності найбільш поширених видів абразивного зношування, що спостерігається при роботі фрикційних пар. Велику увагу приділено динаміці зношування, визначенню працездатності і розрахунку елементів тертя, дано експериментальну оцінку зносостійкості сучасних конструкційних матеріалів і деталей машин.

М.М. Хрущевим у монографії [151] викладена загальна класифікація різних видів зношування, в тому числі абразивного, описані принципи і схеми лабораторних випробувань абразивного зношування; закономірності цього виду зношування при різних умовах: при зношуванні струменем абразивних частинок, в газовому та рідкому потоці, при ударно-абразивному зношуванні. У праці [161] В.В. Шульцом розглянуто проблему збільшення зносостійкого ресурсу деталей машин і інструменту; показано методи визначення оптимальних форм деталей, які побудовані на варіаційних принципах; дано конкретні приклади оптимізації форми ріжучого і шліфувального інструменту, рейок, коліс, зубчастих, черв'ячних передач та ін.

У працях [37, 195] проведено огляд різних видів зношування; досліджується напружений стан і руйнування поверхонь (зношування) при взаємодії деформівних тіл; описано підходи до моделювання процесів зношування, розглянуті контактні задачі зі зношуванням для фіксованої та змінної області контакту для штампа параболічної форми.

Н.К. Мишкіним та М.И. Петроковцем в монографії [103] наведено різні моделі тертя та зношування, описано полімерні та металополімерні покриття, а також покриття триботехнічного призначення. Досліджено контактну взаємодію

для гладких тіл, зокрема плоску задачу для півкругового циліндра з пружним півпростором. Також досліджено процес зношування для конкретних вузлів тертя, зокрема підшипників кочення та зубчастих передач.

У роботі [48] О.В. Закаловим розглянуто основні положення структурно-енергетичної теорії зовнішнього тертя Б.І. Костецького; наведено експериментальні й аналітичні закономірності тертя і зношування; вказано раціональні конструктивні, технологічні й експлуатаційні заходи підвищення надійності і зносостійкості деталей вузлів тертя. У працях [155, 156, 158, 159] В.В. Широковим та ін. розглянуто технічні аспекти зношування та зламів чавунних деталей, вплив інтерметалідних і нікелевих дифузійних покриттів на механічні властивості хромонікелевих сталей; розглянуто підвищення експлуатаційних характеристик робочих поверхонь деталей машин. Також прикладні дослідження пов'язані із тертям в механіці наведено Г.М.Розенблатом в роботі [118]; розглянуто задачу про інтегрування рівнянь руху тіла в умовах його контакту з опорною площиною. У роботі [157] розроблено та реалізовано методику чисельно-аналітичного розв'язування інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю для просторових контактних задач з урахуванням нелінійного закону тертя для двозв'язних полігональних областей контакту. Розв'язування задачі здійснено з використанням кубатурних формул та методів обчислення потенціалів з несиметричним розподілом густини. Оцінено ефективність розробленої методики на задачах про циліндричні штампи з основами обмеженими трикутниками та шестикутниками при врахуванні нелінійних законів тертя та шорсткості пружного півпростору.

У статті [46] розглянуто задачу контакту штампа в формі кругового параболоїда з шорстким пружним півпростором при лінійному законі деформування шорсткості в умовах часткового проковзування. Авторами досліджено вплив коефіцієнтів шорсткості і тертя, значення тангенціальної сили і висоти її прикладення на контактні характеристики, кут нахилу штампа, розміри і форму областей проковзування і зчеплення.

Варто відмітити, що при розв'язуванні контактних задач зі зношуванням важливим є використання наближених методів обчислень. У роботі [61] А.Ю. Коцюбою, С.В. Лавренчук розглянуто чисельні алгоритми для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, котрі отримуються при розв'язуванні задачі про плоску контактну взаємодію пружного тіла та системи штампів із урахуванням тертя. В якості прикладу розглянуто задачу про наближене визначення контактних напружень на внутрішній поверхні зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику. В роботі [106] автором розглянуто осесиметричну задачу про контактну взаємодію штампа поліноміального профілю і пружного півпростору при наявності тертя і часткового зчеплення в області контакту. З використанням методу Вінера-Хопфа задача зведена до нескінченної системи алгебричних рівнянь типу Пуанкаре-Коха, розв'язок якої отримано в рядах.

Для забезпечення надійності роботи основних фрикційних вузлів машин та запобігання їх передчасному виходу з ладу використовують тонкі покриття та накладки, які за своїми фізико-механічними характеристиками та призначенням значно відрізняються. Дослідження впливу цих покриттів на процес роботи деталей, прогнозування часу зношування накладок та захисних шарів залежно від їх товщини структури та жорсткості є важливою технічною задачею. Важливий внесок у дослідження контактної взаємодії тіл з покриттям, в тому числі із зношуванням, зробили: В.В. Аулін, Н.Х. Арутюнян, В.М. Александров, Ю.М. Бусяк, Е.І. Григолюк, С.А. Гришин, О.М. Гузь, Ю.О. Градиський, А.Б. Єфімов, Є.В. Коваленко, І.М. Коровайчук, В.М. Утенков, Ю. К. Машков, NAdibelli, Н. К. Basha, I. Comez.

В роботі [7] В.М. Александровим, С.М. Мхитаряном розглянуті плоскі контактні задачі для про вдавлювання жорстких штампів в пружну півплощину, яка захищена тонким покриттям. Деякі задачі були зведені до розв'язування інтегрального рівняння, яке було розв'язано із використанням нормованих поліномів Лежандра.

В роботі [50] розглянута осесиметрична контактна задача для трансверсально-ізотропного шару, повністю зчепленого з пружним ізотропним півпростором, в якій профіль штампа описується параболічною функцією.

В статті [16] розглянуто задачі розрахунку напружено-деформованого стану, повзучості і пошкоджуваності багат шарових ортотропних плит на пружній основі. Варіаційна постановка виконана в рамках уточненої теорії пластин і оболонок. Для вирішення нелінійної початково-крайової задачі повзучості і пошкоджуваності запропоновано використовувати поєднання методів R-функцій, Рітца і Рунге-Кутта-Мерсона. Наведено приклад розрахунку напружено-деформованого стану двошарової плити на пружній основі. В роботі [42] Я.О. Жуком досліджено вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевого диска.

У роботі [73] наводиться приклад проектування тришарової основи під дією опуклого штампа; запропонована постановка та підхід до розв'язання одного класу обернених задач проектування шаруватих тіл, які потрібним чином реагують на дію штампа; викладено варіаційне формулювання та алгоритм наближеного розв'язання.

У статті [27] наводиться ефективний метод побудови наближеного чисельно-аналітичного розв'язку контактної задачі про вдавлювання сферичного штампа в м'який пружний шар, що лежить на жорсткій основі. Наближений метод розв'язування контактної задачі для багат шарової основи показано в роботі [115], зокрема, для багат шарових основ застосовувано формули сумування Пуассона та вилучення повільно збіжних рядів з виразів для напружень та переміщень у першому шарі. В статті [180] розглянута контактна задача про взаємодію плоского штампа із двошаровою пружною ортотропною півплощиною. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, розв'язування якого було зведено до знаходження коефіцієнтів функції-ряду контактного тиску через нескінченну систему алгебричних рівнянь. Авторами було досліджено вплив властивостей матеріалу та його товщини на розподіл контактних напружень на поверхні першого шару. У [163] здійснено постановку контактної задачі для

штампа, який втискається в пружну півплощину, захищену покриттям. Отримана задача зводиться до двох сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язані за допомогою перетворення Фур'є і застосовуючи граничні умови задачі. У [194] періодична контактна задача зведена до канонічного сингулярного інтегрального рівняння на дузі кола в комплексній площині. Розв'язок рівняння виражається в термінах простих алгебричних функцій комплексного змінного, що значно спрощує її аналіз.

У [114] автором розглянуто широке коло питань присвячених плоским контактним задачам. Також наведено нові дослідження в області тертя та зношування еластомерів та досліджено різні види зношування; показано умови тертя для забезпечення мінімального зношування.

Концепція класифікації термомеханічних властивостей матеріалів є важливим інструментом для розробки нових матеріалів для деяких конкретних функцій. Для моделювання процесу роботи деталей із нанесеними на них тонкими покриттями в даний час продуктивно використовується, в якості пружного шару покриття Вінклера із одним або двома коефіцієнтами постелі. Одними з перших робіт, в яких описані основні співвідношення для покриття Вінклера, є [26, 53]. В роботах [199, 200] досліджується конструкція двошарового дорожнього покриття, основа для якого моделюється за допомогою пружного шару Вінклера. У роботі [198] досліджено руйнування тонкої накладки, котра лежить на бетонному покритті, а вплив базової структури спрощений за допомогою пружної основи Вінклера. В роботі [188] досліджується динамічний аналіз товстих пластин, включаючи балки на пружній основі з використанням модифікованої моделі Власова. У дослідженні в якості теоретичного узагальнення пружної основи, використовується пружний шар Вінклера із одним коефіцієнтом постелі. В праці [192] розв'язано задачу про контактну взаємодію між ізотропним пружним півпростором та жорстким круговим штампом, між якими є проміжний шар Вінклера. Для розв'язування задачі представлений варіаційний підхід, який є наближенням до більш складного випадку із використанням інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. В роботі [18] досліджено технічну задачу

бронестійкості автомобілів, яка зведена до гранично-елементної контактної задачі про взаємодію жорсткого штампа із пружним півпростором, захищеним шаром Вінклера. Досліджено вплив податливості пружного шару на розподіл контактних тисків в сполученні «штанг - перешкода», зокрема, побудовано контактні тиски при різній жорсткості проміжного шару та різній опуклості штампа.

Дослідження фізичних та механічних властивостей різних композиційних покриттів наведено в роботі [170], зокрема, у праці досліджується функціонально-градієнтний шар, пов'язаний з однорідною підкладкою, в який вдавлюється жорсткий штамп трикутної або циліндричної форми. Передбачається, що покриття неоднорідне, може бути ізотропним і лінійно пружним. В статті [15] досліджена плоска контактна задача про вдавлювання опуклого жорсткого штампа в пружне тіло з функціонально-градієнтних покриттям. Отримано варіаційні формулювання задачі у вигляді варіаційної нерівності і еквівалентної йому екстремальної задачі. Показано, що наявність функціонально-градієнтного покриття, модуль Юнга якого перевищує модуль Юнга основного матеріалу, призводить до підвищення максимальних значень контактного тиску і зменшення осадки штампа.

Нові дослідження композиційних покриттів із використанням методів контактної механіки наведені в монографії [181]. В роботі описані та досліджені композиційні і наноструктурні покриття. Авторами наведені основні класичні контактні задачі про взаємодію жорстких штампів із пружним півпростором з тонким покриттям та побудовано контактні напруження для тонких покриттів із використанням ізоляції рівня, проведено аналіз їх розподілу залежно від співвідношення жорсткостей покриття та основи. Прикладні дослідження фізико-механічних властивостей покриттів та сплавів наведені в працях [96, 97, 136, 148, 162]. Авторами розглянуті питання дослідження триботехнічних зносостійких покриттів при терті ковзання, наведено нові трибофізичні властивості металів та полімерів і досліджено контактну міцність нанокристалічних структур поверхонь тертя вуглецевих сплавів.

У статті [179] досліджено процес контактної взаємодії еліптичного параболоїда із тонким пружним (ізотропним, нестискуваним) шаром, який знаходиться на жорсткій основі. При розв'язуванні отриманої задачі авторами було використано припущення Герца, що область контакту за формою подібна до еліпса і задача була зведена до знаходження еліптичних інтегралів першого роду. Авторами були побудовані 3D-розподіли контактного тиску та знайдено величину заглиблення штампа.

У [164, 187] розглянуто схожі контактні задачі про взаємодію волоконно-армованих полімерних композитів із жорстким параболічним штампом, що ковзає. Для розв'язування задач було використано метод скінченних елементів, що був розроблений з використанням ANSYS 10. Авторами проведено порівняльне дослідження аналітичного методу і методу скінченних елементів при розв'язуванні контактних задач. Встановлено, що похибка обчислень між методами становить всього 0.03-1.61%.

У роботі [103] Н.К. Мишкіним викладено фізико-технічні закономірності тертя, зношування і мастила. Особлива увага приділяється фізичним і механічним процесам, які супроводжують формування і руйнування молекулярних зв'язків. Автором охоплено широкий спектр питань від основ фрикційного матеріалознавства, технологічних способів підвищення зносостійкості поверхонь тертя до конкретних деталей вузлів тертя. У [111, 168, 180] розглянуто математичні моделі для аналізу та проектування вузлів тертя ковзання, які містять антифрикційні матеріали. Розроблено методіку створення статистичних моделей антифрикційних матеріалів, які дозволяють не тільки передбачати величину коефіцієнта тертя та інтенсивності зносу, але і проектувати ці матеріали із заданими якістьми. В статті [55] розглянуто проблему застосування композиційних покриттів в гальмівних пристроях. Запропоновано використовувати композиційні матеріали, в основу створення яких покладено принцип додатнього градієнта механічних властивостей. Показано, що підвищення зносостійкості дворазового оплавленого плазмового покриття обумовлено його градієнтною структурою, поверхневий шар якої із пружно-



пластичною дрібнозернистою структурою сприяє припрацюванню і самоорганізації вторинних структур, а розташований нижче шар стовбчастої структури ефективно демпфує зовнішні нормальні та зсувні навантаження.

У роботі А.В. Чичинадзе [152] наведено трибомеханічні матеріали для отримання зносостійких антифрикційних і фрикційних покриттів і поверхневих шарів на різних елементах вузлів тертя і деталях машин. Розглянуто найбільш небезпечні та шкідливі види зношування (абразивне, адгезійне, водневе), які призводять до негативних техніко-економічних наслідків. З точки зору механіки контактної взаємодії, викладені методики розрахунку сил, моментів і коефіцієнтів тертя, а також методики розрахункової оцінки інтенсивності зношування твердих тіл при різних видах тертя.

У роботі [113] розглянуто питання моделювання зносостійких деталей з антифрикційним покриттям. С.В. Полтавченком було отримано розв'язок контактої задачі про зношування покриття, котра була зведена до нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна, яке було розв'язано методом послідовних наближень.

У монографії [198] розглянуто нелінійні контактні задачі із тертям та зношуванням, для розв'язування яких застосовуються чисельні методи, зокрема, метод кінцевих та дискретних елементів. Також наведено метод Безье інтерполяції для контактних задач зі зношуванням, в якому для дискретизації поверхонь контакту використовують три або чотири інтерполяційні вузли. В монографії [85] автори В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук досліджують плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми. У статті [8] А.А. Амирджаняном розглянуто контактна задача теорії пружності про вдавлювання П-подібного жорсткого штампа в пружну напівплощина. Задача розв'язана методом механічних квадратур. Знайдено залежності розподілу контактних напружень і довжин ділянок ковзання і зчеплення зони контакту від відстані між ніжками штампа, коефіцієнта тертя між штампом і півплощиною і коефіцієнта Пуассона матеріалу півплощини.

У статті [179] розглядаються параметри, що впливають на тертя і зношування поверхонь, покритих тонкими плівками. Авторами досліджено контактну взаємодію кулі із пружним півпростом з покриттям. Моделювання контакту було проведено із використанням тривимірного методу скінченних елементів. Схожі дослідження наведені в роботі [182], зокрема, досліджено процес зношування покриття для різних пар тертя. Моделювання процесу взаємодії було здійснено двовимірним методом скінченних елементів.

У роботі [196] проведено дослідження контактної взаємодії плоского штампа із пружною півплощиною в умовах часткового проковзування. Задача сформульована в умовах плоскої деформації і зведена до сингулярного інтегрального рівняння другого роду, яке розв'язано методом колокацій. Числово-аналітичний метод розв'язування інтегральних рівнянь наведено також у роботі [157].

При дослідженні процесів тертя та зношування композиційних матеріалів з покриттями важливим напрямком є використання числових методів при знаходженні параметрів зношування, обчисленні напружень і деформацій. В статті [9] за допомогою комп'ютерного моделювання досліджено напружено-деформований стан композиційних матеріалів та покриттів на всіх етапах їх життєвого циклу. Виявлено тісний взаємозв'язок між складом композиційних матеріалів і покриттів, розмірами і формою їх структурних складових та статистичними і локальними значеннями досліджуваних напружень відповідних нестационарних полів. Авторами показано, що результати комп'ютерного моделювання дають можливість оптимізувати склад та структуру композиційних матеріалів та покриттів для підвищення їх фізико-механічних та триботехнічних характеристик і властивостей. В роботі [139] наведені результати комп'ютерного моделювання контактних напружень і деформацій трибосистеми «повзун-палець» циліндричної напрямної прес-форми для оцінки його зносостійкості. Досліджено, що максимальні контактні навантаження, які виникають на границях контактної взаємодії пальця та циліндричної поверхні повзуна, утворюють витягнуту вздовж осі обертання циліндричної поверхні повзуна зону максимального зносу в місцях

розміщення максимальних контактних тисків. Проблема зношування пружних рухомих частин фрикційних з'єднань з різною площею контакту описана також у [167]. Процес зношування моделюється відповідно до закону «Reye-Archard». Також запропоновано спосіб розв'язку задачі із використанням покриття Вінклера, в якому коефіцієнт Вінклера є приведеним до змінної області контакту. Прикладні дослідження впливу багатошарових покриттів на процеси тертя і зношування наведено в статті [14]. В.М. Бересневим наведені результати досліджень триботехнічних характеристик багатокомпонентних: Ti-Cu-N, Ti-Al-N, багатошарових: TiN+ $\alpha$ -Ti, TiN+TiC TiC+TiN покриттів. Дослідження показали, що для деяких покриттів, які включають м'який компонент, виявлено існування ефекту вибіркового переносу.

У [136] розроблено математичну модель процесу прогнозування зносу в умовах сухого тертя багатокомпонентних композитних покриттів на пористих матеріалах з захисно-зміцнюючими покриттями. Встановлено взаємовплив параметрів електролізу, структури, фазового складу покриття, глибини дифузійного впровадження та інтенсивності масового зносу для пористих матеріалів. Шляхом обробки експериментальних і теоретичних даних показано, що інтенсивність масового зношування залежить від якісних характеристик поверхневого шару.

Нові дослідження, близькі до тематики даної дисертаційної роботи, описані у [167, 169, 172, 184, 191]. Зокрема, авторами досліджується контактна взаємодія жорстких тіл з покриттям за наявності тертя та зношування.

Незважаючи на значний науковий та практичний інтерес вищеописаних досліджень, контактні задачі про взаємодію жорстких штампів канонічних (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) форм досліджені недостатньо. Аналітичні розв'язки контактних задач отримані лише для малих ділянок області контакту, та в переважній більшості випадків для штампа параболічної форми. Для всебічного і поглибленого дослідження процесів контактної взаємодії жорстких та пружних тіл необхідно застосовувати та розвивати аналітико-числові методи розв'язування контактних задач, побудову числових схем для визначення

контактного тиску на всьому діапазоні вхідних параметрів та побудови 3D-графіків, ізоліній рівня компонент напружень в середині півплощини при аналізі напружено-деформованого стану. Недостатньо дослідженими є умови появи пластичних зон для фрикційних пар при конкретних матеріалах та вплив на величину таких зон форми штампа та області контакту.

При дослідженні контактних задач про зношування, мало вивченим є питання застосування методу поліномів Чебишова до розв'язування отриманих інтегральних рівнянь для різних профілів штампа зі зведенням їх до розв'язування узагальненої проблеми на власні значення. Додаткового аналізу потребують числові методи відшукування власних векторів та власних значень та забезпечення збіжності запропонованих аналітико-числових схем. Практично недостатньо дослідженою є проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних з'єднань та вплив форми деталей та перебіг процесу зношування. Основною проблемою при дослідженні таких задач є знаходження області контакту в різні часові моменти та характеру швидкості зношування в різних часових відрізках.

На практиці додаткових досліджень потребують контактні задачі про зношування тонких покриттів, оскільки питання підвищення зносостійкості деталей шляхом додавання накладок та напилень є актуальним у техніці та на виробництві. Основною складністю при розв'язуванні задач такого типу є відсутність аналітичних методів розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь, що залежать від часу і просторових координат. Одним із можливих шляхів їх розв'язання є числовий метод розбиття часу роботи фрикційної пари на малі часу відрізки та прийняття постулату, що область контакту на цих відрізках є незмінною. Згідно з цим методом, усебічного вивчення потребує нетривіальна задача відшукування величини області контакту на кожному часовому проміжку при умові, що притисчаюча сила є сталою.

Також маловивченим в рамках описаної проблеми є прогнозування часу повного зношування тонкого покриття (шару Вінклера) в будь-якій точці, та вплив на цей процес форми штампа, фізико-механічних та фрикційних параметрів покриття, початкових параметрів контактної взаємодії.

## РОЗДІЛ 2

### ЗАДАЧІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКИХ ШТАМПІВ З ПРУЖНОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ

У розділі наведено вихідні співвідношення контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружною півплощиною без урахування зношування. Зроблена постановка плоских контактних задач для визначення контактного тиску, напружено-деформованого стану в пружній півплощині під дією різних за формою штампів (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна). Отримано основне інтегральне рівняння задачі, розв'язування якого було зведено до чисельно-аналітичного обчислення повних еліптичних інтегралів першого та третього роду. Наведені основні методи для знаходження наближених значень еліптичних інтегралів при різних вхідних параметрах. Розроблено програмні модулі із використанням спеціальних вбудованих бібліотек для обчислення еліптичних інтегралів третього роду.

Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації отриманих математичних моделей із використанням спеціальних функцій та засобів візуального відображення результатів (3D-зображення та лінії рівня).

Досліджено особливості розподілу контактного тиску та напружень у пружній півплощині для різних областей контакту.

Результати розділу опубліковані у працях [120, 121] і доповідались на конференціях [89, 123, 124, 128].

## 2.1. Вихідні співвідношення контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружною півплощиною

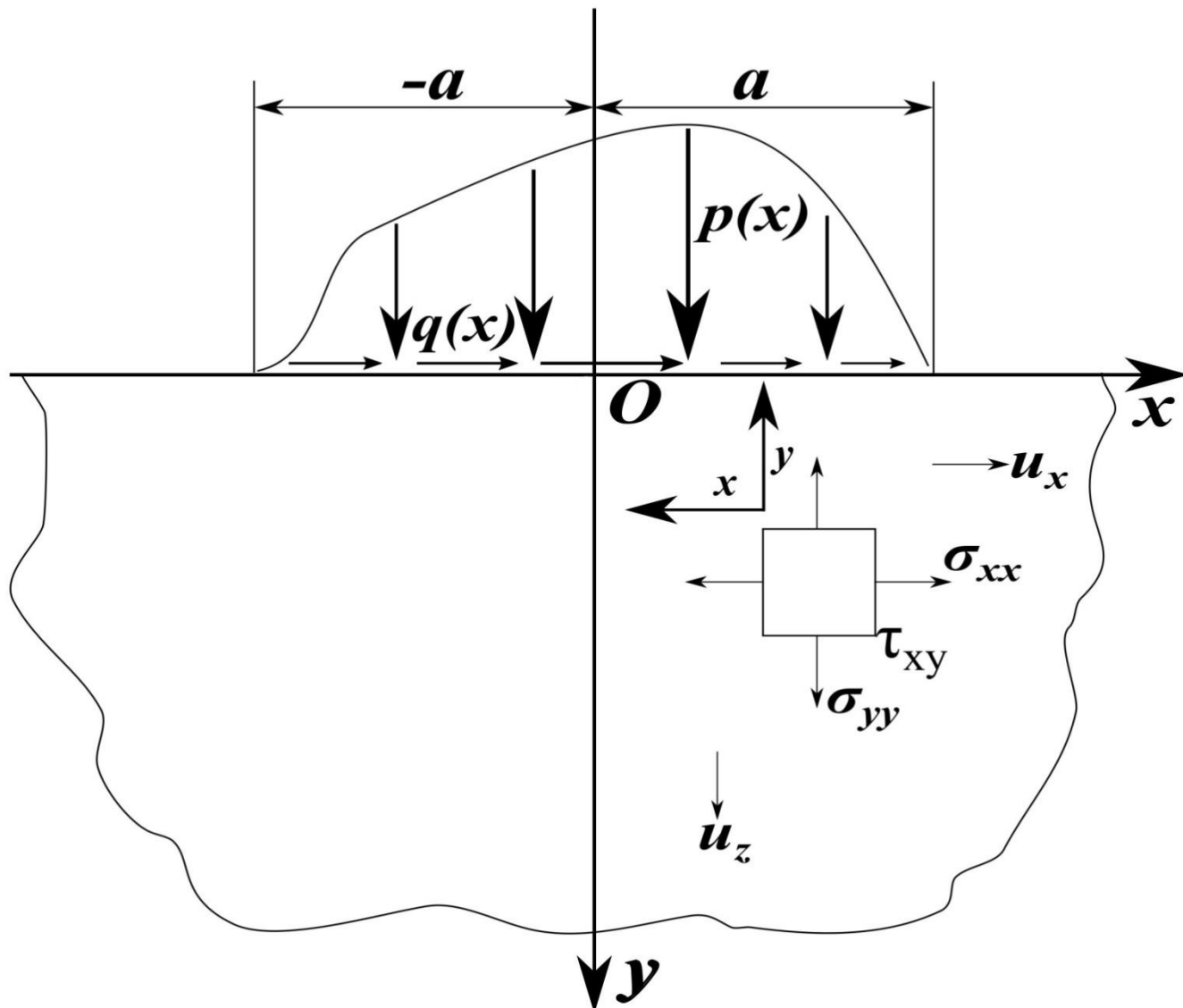


Рис. 2.1

Напружено-деформований стан в пружному тілі для випадку плоскої задачі визначається трьома компонентами напружень:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ . При відсутності масових сил вони задовольняють диференціальним рівнянням рівноваги [30]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Оскільки для плоскої задачі:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0. \quad (2.2)$$

то компоненти тензора деформацій згідно формул Коші можна записати у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.3)$$

Оскільки три компоненти деформацій  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  виражені через дві компоненти вектора переміщень  $u$ ,  $v$ , то між ними існує співвідношення. Виконується умова сумісності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.4)$$

У випадку ізотропного матеріалу компоненти тензора напружень зв'язані з компонентами тензора деформацій наступними співвідношеннями [110]:

$$\sigma_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx}, \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{yy}, \sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}. \quad (2.5)$$

Тут  $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$  – об'ємне розширення,  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ляме.

На основі цих рівнянь компоненти деформацій можуть бути виражені через компоненти напружень:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma_{yy}], \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1+\nu)\sigma_{xx}], \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \quad (2.6)$$

де модуль пружності  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu$  визначаються через коефіцієнти  $\lambda$  та  $\mu$  формулами:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.7)$$

Коефіцієнти Ляме виражаються через  $E$  і  $\nu$  при плоскому деформаційному стані наступним чином [26]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.8)$$

У випадку узагальненого плоского напруженого стану коефіцієнти  $\lambda^*$ ,  $\mu$  записуються формулами [110]:

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.9)$$

Рівняння (2.1) можна представити також через  $u, v$  в формі рівнянь Ляме [30, 101]:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \mu \Delta u = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \mu \Delta v = 0, \quad (2.10)$$

де  $\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nabla v}{\partial y}$  задовольняє рівнянню  $\Delta \theta_1(x, y) = 0$  ( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ).

З умови сумісності (2.4), підставивши співвідношення (2.5), отримаємо рівняння:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (2.11)$$

Варто відмітити, що умови рівноваги виконуються, якщо  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  виражаються через деяку функцію  $\Phi(x, y)$  наступним чином:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.12)$$

При підстановці (2.12) в (2.11) отримаємо, що функція напружень  $\Phi(x, y)$  повинна задовольняти умови бігармонічного рівняння:

$$\Delta \Delta \Phi \equiv \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.13)$$

Додатково, окрім наведених вище співвідношень та рівнянь, мають виконуватися відповідні граничні умови для півплощини. На межі  $y = 0$ , поза проміжком навантаження, поверхня вільна від навантаження [43]:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad x < -a, \quad x > a. \quad (2.14)$$

На навантаженому проміжку маємо:

$$\sigma_{yy} = -p(x), \quad \tau_{xy} = -q(x), \quad -a \leq x \leq a. \quad (2.15)$$

При великому віддаленні від проміжку навантаження  $x, y \rightarrow \infty$  напруження будуть зменшуватись  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \rightarrow 0$ .

Для конкретизації постановки контактних задач в області навантаження потрібно задати будь-які дві із наступних чотирьох функцій:  $p(x), q(x), u_x(x),$



$u_z(x)$ , де  $u_x(x)$ ,  $u_z(x)$  тангенціальне і нормальне переміщення зовнішньої поверхні. Різними комбінаціями заданих функцій відповідають різні контактні задачі [43]. Наприклад, при вдавлюванні в пружну півплощину жорсткого штампа нормальні переміщення  $u_z(x)$  визначаються відомим профілем штампа. Якщо при цьому на поверхні контакту тертя відсутнє, то друга гранична умова полягає в рівності нулю дотичних напружень під штампом  $q(x) = 0$ , а необхідно визначити  $p(x)$ . Якщо, навпаки, основа штампа зчеплена з поверхнею півплощини при відсутності проковзування в області контакту, то задаються тангенціальне переміщення  $u_x(x)$ , а  $q(x)$  потрібно знайти. Якщо штамп рухається по поверхні півплощини з коефіцієнтом тертя  $k_1$ , то в цьому випадку задаються тільки переміщення  $u_z(x)$ , а друга гранична умова задається співвідношенням  $q(x) = \pm k_1 p(x)$ .

Пружні переміщення поверхні визначаються наступними співвідношеннями [43]:

$$u_x(x) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-a}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right\} - \frac{2(1-2\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a q(s) \ln|x-s| ds + C_1,$$

$$u_z(x) = -\frac{2(1-2\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a p(s) \ln|x-s| ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-a}^x q(s) ds - \int_x^a q(s) ds \right\} + C_2. \quad (2.16)$$

Стрибкоподібна зміна переміщень на початку координат у (2.16), приводить до необхідності розчеплення меж інтегрування членів у фігурних дужках. Якщо замість абсолютних значень  $u_x(x)$  та  $u_z(x)$  ввести градієнти переміщень на поверхні  $\partial u_x / \partial x$ ,  $\partial u_z / \partial x$ , то формули (2.16) приймають зручніший та простіший вигляд. Крім того, цей прийом дозволяє позбутися невизначеності в значеннях переміщень зв'язаних наявністю сталих  $C_1$ ,  $C_2$ . Диференціюючи члени у фігурних дужках по межі інтегрування  $x$ , а інші під знаком інтегралу отримаємо:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) - \frac{2(1-2\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{2(1-2\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x). \quad (2.17)$$

Градiєнт  $\partial u_x / \partial x$  представляє компоненту деформацій  $\varepsilon_x$  на поверхні, а градiєнт  $\partial u_z / \partial x$  – поточний нахил дотичної до деформованої поверхні основи.

Варто зауважити, що при наявності  $p(x)$ , коли  $q(x) \equiv 0$ , маємо:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x). \quad (2.18)$$

З іншого боку, із закону Гука для плоскої деформації на межі півплощини маємо:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} ((1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma_{yy}). \quad (2.19)$$

Для зручності постановки плоских контактних задач в області контакту  $-a \leq x \leq a$  перепишемо співвідношення (2.17) у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds &= \frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} p(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} u'_x(x), \\ \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds &= \frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} q(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} u'_z(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для заданих переміщень співвідношення (2.20) складають систему інтегральних рівнянь відносно невідомих  $p(x)$ ,  $q(x)$ . Ділянка інтегрування включає в себе особливу точку  $s = x$ , внаслідок чого ці рівняння є сингулярними інтегральними рівняннями [97, 102].

## 2.2. Постановка та розв'язування плоскої контактної задачі

Розглядається взаємодія жорсткого штампа з пружною півплощиною, яка знаходиться в умовах плоскої деформації. У таку півплощину під дією вертикальної сили  $P$  вдавлюється жорсткий штамп з основою  $f(x)$  (рис. 2.2).

Тут  $2a$  – область контакту,  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона півплощини. Під штампом дотичні напруження відсутні. Із системи рівнянь (2.20) при умові, що  $q(x) = 0$ , інтегральне рівняння для визначення контактного тиску має вигляд [43]:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E_*}{2} \frac{df(x)}{dx}, \quad (2.21)$$

де  $\frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}$ ,  $p(x)$  – контактний тиск,  $E_p$ ,  $\nu_p$  – пружні характеристики штамп.

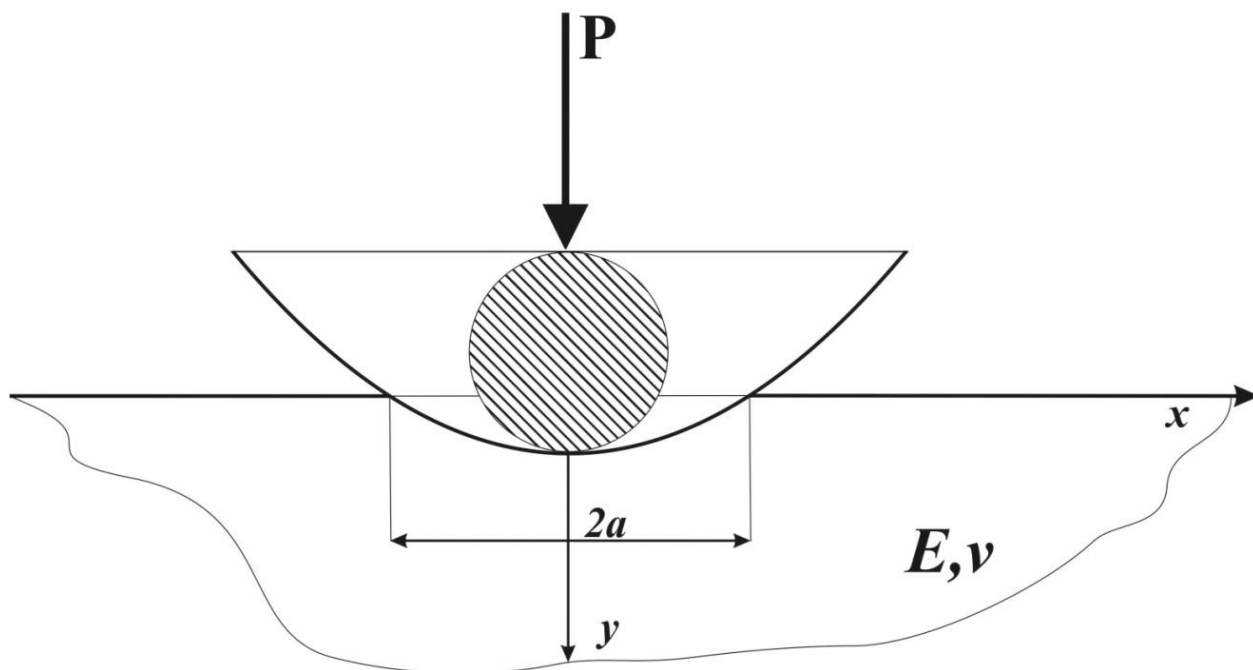


Рис. 2.2

Рівняння (2.21) є сингулярним інтегральним рівнянням першого роду на скінченному відрізку. Розв'язок інтегрального рівняння (функція контактного тиску), який є обмеженим на кінцях області контакту (штампи без кутових точок), має вигляд [82]:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{f'(s)}{\sqrt{a^2 - s^2} (x-s)} ds, \quad (2.22)$$

при умовах:

$$p(\pm a) = 0, \quad P = \int_{-a}^a p(x) dx, \quad \int_{-a}^a \frac{f'(s)}{\sqrt{a^2 - s^2}} ds = 0 \quad (2.23)$$

Досліджується контактна взаємодія пружної півплощини зі штампами:

- 1) параболічної форми  $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$ , де  $R$  – радіус кривизни в точці  $x=0$ ;

- 2) циліндричної форми  $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$ , де  $R$  – радіус циліндра;
- 3) еліптичної форми  $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$ , де  $a_1, b_1$  – велика та мала

півосі еліпса;

- 4) гіперболічної форми  $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$ , де  $a_1, b_1$  – величини

дійсної та уявної півосей гіперболи.

Для розрахунків  $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$  у штампах еліптичної та гіперболічної форми.

Знайдемо контактний тиск для штампа параболічної форми [110]. Із формули (2.22) маємо:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{\pi} \frac{\pi E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{s ds}{R \sqrt{a^2 - s^2} (x - s)}. \quad (2.24)$$

Відомо із [30]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{t^n dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} = x^{n-1} + \sum_{k=1}^m \frac{(2k-1)!}{2k!} a^{2k} x^{n-2k-1}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{s ds}{\sqrt{a^2 - s^2} (x - s)} = -1. \quad (2.25)$$

Для зручності математичних перетворень та обчислень введемо безрозмірні величини  $\bar{a} = \frac{a}{R}, \bar{x} = \frac{x}{R}, \bar{p}(\bar{x}) = \frac{p(x)}{E_*}, \bar{P} = \frac{P}{E_* R}$ . Враховуючи (2.25), контактний

тиск (2.24) для параболічного штампа набуде вигляду:

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{\bar{a}^2 - \bar{x}^2}}{2}. \quad (2.26)$$

Притискаюча сила  $\bar{P}$  згідно (2.23) має вигляд:

$$P = \frac{E_*}{2R} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left( \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \Big|_{-a}^a = \frac{a^2 \pi}{2} \frac{E_*}{2R}, \quad \bar{P} = \frac{\pi}{4} \bar{a}^2. \quad (2.27)$$

Для штампа циліндричної форми контактний тиск за формулою (2.22) набуде вигляду:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{s ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x - s)}. \quad (2.28)$$

Перетворимо інтеграл у правій частині (2.28), додавши та віднявши в чисельнику підінтегральної функції змінну  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{sds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x-s)} &= \int_{-a}^a \frac{(x - (x-s))ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x-s)} = \\ &= \int_{-a}^a \frac{xds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x-s)} - \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Контактний тиск (2.28) із урахуванням (2.29) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}) &= -\frac{\sqrt{a^2 - \bar{x}^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} R \left( \int_{-a}^a \frac{xds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x-s)} - \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2}} \right) = \\ &= \frac{E_*}{2\pi} \sqrt{a^2 - \bar{x}^2} (RI_1^c - RxI_3^c), \end{aligned} \quad (2.30)$$

де

$$\begin{aligned} RI_1^c &= R \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2}} = \left. \begin{array}{l} t = \frac{s}{a}, \\ dt = \frac{ds}{a} \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2}}. \\ RxI_3^c &= Rx \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x-s)} = \int_{-a}^a \frac{ds}{\frac{a}{a} \frac{R}{R} (1 - \frac{sa}{Rxa})} = \\ &= \left. \begin{array}{l} t = \frac{s}{a}, \\ dt = \frac{ds}{a} \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})} &= \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})} + \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})} = \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1+t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t\frac{\bar{a}}{\bar{x}})} = 2\bar{x}^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t^2\bar{a}^2)} \\ RxI_3^c &= 2\bar{x}^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t^2\bar{a}^2)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Визначені інтеграли у правих частинах (2.31) та (2.32) є повними еліптичними інтегралами першого та третього роду відповідно.

Підставивши (2.31) та (2.32) у (2.28), контактний тиск для циліндричного штампа набере вигляду:

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\bar{a}^2 - \bar{x}^2} \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2}} - \bar{x}^2 \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t^2 \bar{a}^2)} \right) \right). \quad (2.33)$$

Для штампів еліптичної та гіперболічної форм для розрахунків прийmemo, що:  $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ . Провівши математичні перетворення, аналогічні до циліндричного штампа, контактний тиск для еліптичного штампа матиме вигляд:

$$\bar{p}(\bar{x}) = (1 \pm \varepsilon) \frac{\sqrt{\bar{a}^2 - \bar{x}^2}}{\pi} \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2}} - \bar{x}^2 \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t^2 \bar{a}^2)} \right) \right). \quad (2.34)$$

Для штампа гіперболічної форми із (2.22) контактний тиск має вигляд:

$$p(x) = (1 \pm \varepsilon) \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{s ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)}. \quad (2.35)$$

Для інтеграла у правій частині у (2.35) додамо та віднімемо в чисельнику змінну  $x$ . Контактний тиск для гіперболічного штампа набере вигляду:

$$p(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \frac{1}{1 \pm \varepsilon} (R I_1^h - R x I_3^h), \quad (2.36)$$

де

$$I_1^h = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}}, I_3^h = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)}. \quad (2.37)$$

Проведемо математичні перетворення інтегралів у (2.37), провівши заміну  $s = a \cos \varphi$  при  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  [59, с.755].

$$R \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}} = 2R \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}},$$

$$2R \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}} = \left. \begin{array}{l} s = a \cos \varphi \\ ds = -a \sin \varphi d\varphi \\ \cos \varphi = \frac{s}{a} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{s}{a}\right) \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}; \varphi_1 = 0 \end{array} \right| = 2R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-a \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi}} =$$

$$= 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin \varphi d\varphi}{a \sin \varphi \sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi}} = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 (1 - \sin^2 \varphi)}} =$$

$$2R \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}} = \left. \begin{array}{l} s = a \cos \varphi \\ ds = -a \sin \varphi d\varphi \\ \cos \varphi = \frac{s}{a} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{s}{a}\right) \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}; \varphi_1 = 0 \end{array} \right| = 2R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-a \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi}} =$$

$$= 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin \varphi d\varphi}{a \sin \varphi \sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi}} = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 (1 - \sin^2 \varphi)}} =$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2 + a^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} \sin^2 \varphi}}.$$

Перший інтеграл у формулі (2.37) набуде вигляду:

$$I_1^h = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{a}^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi}}. \quad (2.38)$$

Проведемо аналогічні математичні перетворення для другого інтегралу у (2.37).

$$\begin{aligned}
R \int_{-a}^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)} &= R \left( \int_{-a}^0 \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)} + \right. \\
&+ \left. \int_0^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)} \right) = xR \left( \int_0^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)} + \right. \\
&+ \left. \int_0^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x + s)} \right) = 2x^2 R \int_0^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x^2 - s^2)}; \\
2x^2 R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin \varphi d\varphi}{a \sin \varphi \sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi} (x^2 - a^2 \cos^2 \varphi)} &= \\
2x^2 R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 (1 - \sin^2 \varphi)} (x^2 - a^2 (1 - \sin^2 \varphi))} &= \\
2x^2 R \int_0^a \frac{x ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x^2 - s^2)} &= \left. \begin{array}{l} s = a \cos \varphi \\ ds = -a \sin \varphi d\varphi, \cos \varphi = \frac{s}{a} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{s}{a}\right), \varphi_0 = \frac{\pi}{2}; \varphi_1 = 0 \end{array} \right| = \\
= \frac{2x^2 R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2 + a^2} \sin^2 \varphi} (x^2 - a^2) \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \sin^2 \varphi\right)} &= \\
= \frac{2x^2 R}{(x^2 - a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2 + a^2} \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \sin^2 \varphi\right)} &= \\
= \frac{1}{\left(1 - \frac{(\frac{a}{R})^2}{(\frac{x}{R})^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{a}{R})^2}{\left(1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2\right)} \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{(\frac{a}{R})^2}{\left(\left(\frac{x}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right)} \sin^2 \varphi\right)} &.
\end{aligned}$$

Остаточню:



$$I_3^h = \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{a}^2}{\bar{x}^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{a}^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{\bar{a}^2}{(\bar{x}^2 - \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi\right)}. \quad (2.39)$$

Інтегралы у (2.38) та (2.39) є повними еліптичними інтегралами першого та третього роду відповідно записані у формі Лежанрда. Враховуючи (2.38) та (2.39), контактний тиск для гіперболічного штампа в безрозмірних величинах набере вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}) = & \frac{\sqrt{\bar{a}^2 - \bar{x}^2}}{\pi} \frac{1}{1 \pm \varepsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{a}^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{a}^2}{\bar{x}^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{a}^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{\bar{a}^2}{(\bar{x}^2 - \bar{a}^2)} \sin^2 \varphi\right)} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

**2.2.1. Методика чисельно-аналітичного обчислення еліптичних інтегралів.** У загальному випадку неповні еліптичні інтегралы першого та третього роду мають вигляд [11]:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.41)$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} (1 + n \sin^2 t)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.42)$$

В нашому випадку  $\varphi = 90^\circ$ , а  $n, k$  є параметрами, які залежать від форми штампа, наприклад, для гіперболічного штампа вони мають вигляд:  $n = \frac{\bar{a}^2}{(\bar{x}^2 - \bar{a}^2)}$ ,

$$k = \pm \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^2)}}.$$

Розглянемо методи чисельного обчислення для  $F(\varphi, k)$  (2.41) при різних вхідних параметрах. Якщо значення модуля  $k < 1$ ,  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ , то для обчислення

інтеграла можна використати розклад в ряд, який добре збіжний при  $k < 1, \varphi < \frac{\pi}{4}$  [10, 116]:

$$F(\varphi, k) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_2 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_3 k^6 + \dots, \quad (2.43)$$

де  $A_n = \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi d\varphi, (n = 0, 1, 2, \dots)$ .

Обчислення коефіцієнтів  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  можна провести із використанням рекурентної формули:

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2} 2n \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi. \quad (2.44)$$

Для обчислення (2.41) також широко використовують перетворення Ландена та його подальші модифікації. Еліптичний інтеграл першого роду задовольняє співвідношенню [135]:

$$\int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1+k_1}{2} \int_0^{\varphi_1} (1 - k_1^2 \sin^2 t_1)^{-\frac{1}{2}} dt_1, \quad (2.45)$$

при умові, що  $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, k' = \sqrt{1-k^2}$  та  $tg(\varphi_1 - \varphi) = k' tg \varphi$ .

Варто зауважити, що при  $\varphi \approx 90^\circ$  змінна  $\varphi_1$  набуває невеликих значень і  $k'$  є додатковий модуль до параметра  $k$ . Якщо покласти  $k = \sin \alpha, k' = \sin \alpha_1$ , то перетворення Ландена запишеться у вигляді:

$$\int_0^{\varphi} (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\varphi_1} (1 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 t_1)^{-\frac{1}{2}} dt_1, \quad (2.46)$$

де  $\sin \alpha_1 = tg^2 \frac{\alpha}{2}, tg(\varphi_1 - \varphi) = \cos \alpha tg \varphi$ .

Використовуючи дане перетворення,  $F(\varphi, k)$  обчислюється за формулами:

$$\sin \alpha_{n+1} = tg^2 \frac{\alpha_n}{2}, g(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \cos \alpha_n tg \varphi_n, \quad (2.47)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  та  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  – серії значень, що задаються.

Враховуючи (2.46) та (2.47), інтеграл  $F(\varphi, k)$  із (2.42) обчислюється у вигляді:

$$\int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt \approx \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \dots \cos^2 \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \frac{\varphi_n}{2^n}. \quad (2.48)$$

У роботі [135] наведені практичні задачі механіки, які зводяться до еліптичних інтегралів першого та другого роду, а також для спрощення обрахунків подано таблиці із значеннями описаних інтегралів для деяких  $\varphi, k$ .

У загальному випадку будь-який еліптичний інтеграл третього роду  $\Pi(n, k, \varphi)$  залежить від трьох параметрів  $n, k, \varphi$ , де  $n, k$  є числовими параметрами і залежать від форми штампа. При  $k < 1$  знаходження еліптичного інтегралу третього роду можна звести до обчислення деякого числового ряду [11], в який розкладається підінтегральна функція.

При малих значеннях  $\varphi$  вищеописаний метод дає якісні наближення, однак, коли  $\varphi \approx 90^\circ$ , неможливо отримати коректне значення еліптичного інтегралу у зв'язку із особливостями побудови обчислюваного ряду. Для вирішення даної проблеми пропонується використати чисельну інверсію еліптичних інтегралів третього роду. Основна ідея цього методу полягає у поділі вхідних аргументів навпіл згідно теореми додавання для оцінки неповних еліптичних інтегралів [174]. Проте, як і в попередньому методі, обчислення неможливо провести при значеннях  $\varphi \approx 90^\circ$ . Для практичного застосування ці методи є неефективними, а більшість задач прикладної механіки (у тому числі контактні задачі) потребують обчислення інтегралів у всьому діапазоні значень параметрів.

У дисертації використано роботи Б. Карлсона [165, 166], в яких запропоновано метод послідовного обчислення еліптичних інтегралів, що базується на застосуванні методу дублювання. Цей метод годиться для обчислення всіх типів еліптичних інтегралів. Для цього стандартна форма еліптичного інтегралу (2.42) записується через інтеграли Карлсона [165, 166, 173]:

$$\begin{aligned} \Pi(n_0, k, \varphi) &= \int_0^{\varphi} (1 + n_0 \sin^2 t)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt = (\sin \varphi) \times \\ &\times R_F(\cos^2 \varphi, 1 - k^2 \sin^2 \varphi, 1) - \frac{n}{3} (\sin \varphi)^3 R_J(\cos^2 \varphi, 1 - k^2 \sin^2 \varphi, 1 + n_0 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$R_J(x, y, z, p) = \frac{3}{2} \int_0^\infty ((t+x)(t+y)(t+z))^{\frac{1}{2}} (t+p)^{-1} dt. \quad (2.50)$$

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty ((t+x)(t+y)(t+z))^{\frac{1}{2}} dt. \quad (2.51)$$

Інтеграл  $R_J$  знаходиться у вигляді суми за формулою (2.50). Нехай, маємо деяку точку  $T_0(x_0, y_0, z_0, p_0)$ , в якій  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ ,  $z_0 > 0$ ,  $p_0 > 0$ , тоді можемо записати:

$$R_J(x_0, y_0, z_0, p_0) = 3 \sum_{m=0}^{n-1} 4^{-m} R_c(\alpha_m, \beta_m) + \sum_{m=0}^{n-1} 4^{-m} R_c(\alpha_m, \beta_m) + \\ + 4^{-n} \mu_n^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{3}{7} s_n^{(2)} + \frac{1}{3} s_n^{(3)} + \frac{3}{22} (s_n^{(2)})^2 + \frac{3}{11} s_n^{(4)} + \frac{3}{13} s_n^{(2)} s_n^{(3)} + \frac{3}{13} s_n^{(5)} + r_n \right). \quad (2.52)$$

$$\alpha_m = [p_n (x_n^{\frac{1}{2}} + y_n^{\frac{1}{2}} + z_n^{\frac{1}{2}}) + (x_n y_n z_n)^{\frac{1}{2}}]^2, \quad \beta_n = p_n (p_n + \lambda_n)^2. \quad (2.53)$$

$$s_n^{(m)} = (X_n^m + Y_n^m + Z_n^m + 2P_n^m) / 2m, \quad \text{де } (m = 2, 3, 4, 5). \quad (2.54)$$

$$X_n = 1 - (x_n / \mu_n), \quad Y_n = 1 - (y_n / \mu_n), \quad Z_n = 1 - (z_n / \mu_n), \quad P_n = 1 - (p_n / \mu_n), \\ x_{n+1} = (x_n + \lambda_n) / 4, \quad y_{n+1} = (y_n + \lambda_n) / 4, \quad z_{n+1} = (z_n + \lambda_n) / 4, \quad p_{n+1} = (p_n + \lambda_n) / 4. \quad (2.55)$$

$$\lambda_n = (x_n y_n)^{\frac{1}{2}} + (x_n z_n)^{\frac{1}{2}} + (y_n z_n)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_n = (x_n + y_n + z_n + 2p_n) / 5, \\ \varepsilon_n = \max\{|X_n^m|, |Y_n^m|, |Z_n^m|, |P_n^m|\}, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad \text{то } \varepsilon_n = O(4^{-n}). \quad (2.56)$$

$$|r_n| < \frac{3\varepsilon_n^6}{(1 - \varepsilon_n)^{\frac{3}{2}}}, \quad r_n \approx \frac{-1}{10} (s_n^{(2)})^3 + \frac{3}{10} (s_n^{(3)})^2 + \frac{3}{5} s_n^{(2)} s_n^{(4)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.57)$$

де  $r_n$  – залишковий член ряду. Інтеграли  $R_c(x, y)$  та  $R_F(x, y, z)$  можна обчислити за схемою, яка описана у [165].

При розв'язуванні практичних задач для спрощення обчислень зручно використовувати таблиці значень  $\Pi(n, k, \varphi)$  для всього діапазону параметрів. У працях [165, 178] авторами наведено алгоритми та числові схеми для побудови таблиць значень еліптичних інтегралів в широкому діапазоні значень на основі методик із використанням інтегралів Карлсона. У роботі [173] висвітлено нові модифікації описаної методики обчислення та доведено їх теоретичну збіжність, а

також наведено прикладні задачі, розв'язування яких зводиться до обчислення такого типу інтегралів.

**2.2.2. Визначення контактної тиску.** Для автоматизації побудови графіків контактних тисків було обрано програму Matlab, в якій на основі вищеописаних інтегралів Карлсона, є вбудовані функції для обчислення значень еліптичних інтегралів першого, другого та третього роду. Зокрема, для побудови графіків контактних тисків було використано спеціальну вбудовану функцію  $EllipticK(k)$  для обчислення повного еліптичного інтегралу, та функцію  $EllipticPi(n,k,z)$  для повних і неповних еліптичних інтегралів третього роду [193] та для порівняння результатів розроблено програмні модулі обчислення еліптичних інтегралів на основі вище описаних схем.

Розподіли контактної тиску для малої області контакту  $\frac{a}{R} < 0.1$  практично співпадають для всіх форм штампів і є аналогічними до розподілу контактної тиску для штампа параболічної форми. Цей факт також підтверджується, якщо провести розклад функцій в околі точки  $x=0$ . Враховуючи формули профілів штампів описаних вище маємо, що для штампа параболічної форми похідна рівна

$$f'(x) = -\frac{x}{R} \text{ і відповідно } f''(x) = -\frac{1}{R} \text{ та } f''(0) = -\frac{1}{R}.$$

Для циліндричного штампа при  $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$  маємо

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \approx -\frac{1}{R}x = -\frac{x}{R}.$$

Відповідно  $f''(x) = -\frac{\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$  та відповідно

$$f''(0) = -\frac{R^2}{R^3} = -\frac{1}{R}.$$

Для штампа еліптичної форми при  $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$ , де  $a_1, b_1$  – велика та мала півосі еліпса і  $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ , маємо

$$f'(x) = \frac{b_1}{a_1} \left( -\frac{x}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} \right) \approx -\frac{b_1 x}{a_1^2} = -\frac{R(1 \pm \varepsilon)}{R^2} x = -(1 \pm \varepsilon) \frac{x}{R}.$$

$$\text{Відповідно } f''(x) = -\frac{b_1}{a_1} \frac{a_1^2}{(a_1^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''(0) = -\frac{b_1}{a_1^2}, \quad f''(0) = -\frac{(1 \pm \varepsilon)R}{R^2} = -\frac{(1 \pm \varepsilon)}{R}.$$

Для штампа гіперболічної форми при  $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$ , де  $a_1, b_1$  – величини дійсної та уявної півосей гіперболи, маємо

$$f'(x) = -\frac{b_1}{a_1} \frac{x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} \approx -\frac{b_1}{a_1^2} x = -(1 \pm \varepsilon) \frac{x}{R}.$$

Відповідно

$$f''(x) = -\frac{b_1}{a_1} \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a_1^2 + x^2}}}{a_1^2 + x^2} = -\frac{b_1}{a_1} \frac{a_1^2 + x^2 - x^2}{(a_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b_1 a_1}{(a_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''(0) = -\frac{b_1}{a_1^2},$$

$$f''(0) = -\frac{(1 \pm \varepsilon)R}{R^2} = -\frac{(1 \pm \varepsilon)}{R}.$$

Для всіх штампів також справедливо, що  $f'(0) = 0$ .

На графіках і в подальшому для безрозмірних величин рисочки опущені. На рис. 2.3 наведено графік контактного тиску для штампа циліндричної форми при  $a/R = 0.1$ , а на рис.2.4 – для штампа гіперболічної форми при  $a/R = 0.1$ , для різних  $\varepsilon$ . Крива 1 на цьому рисунку відповідає значенню  $\varepsilon = 0.1$ ; крива 2 –  $\varepsilon = 0.01$ ; крива 3 –  $\varepsilon = -0.1$ . Проведений числовий аналіз також підтверджує, що результати практично співпадають для всіх форм штампів. Опосередковано це підтверджує і рис. 2.6.

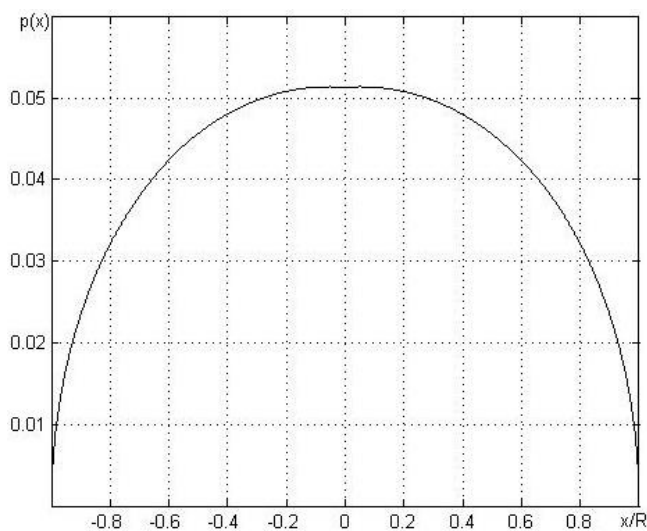


Рис. 2.3

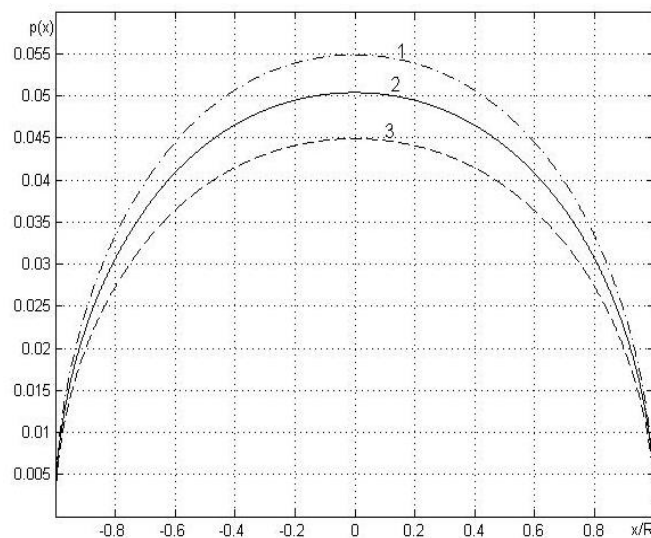


Рис. 2.4

На рис. 2.5 наведено графіки контактних тисків для всіх штампів при  $a/R=0.3$ ,  $\varepsilon=0.1$ .

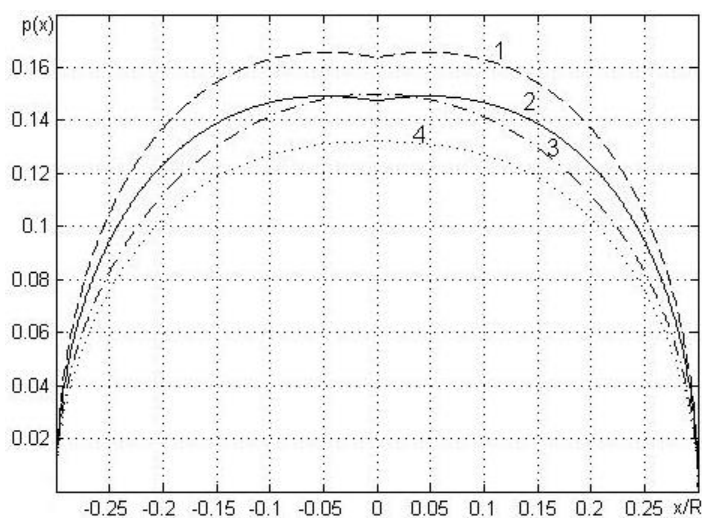


Рис. 2.5

На рис. 2.5 та рис. 2.6: 1 – циліндрична форма, 2 – еліптична форма, 3 – гіперболічна форма, 4 – параболічна форма штампів.

На рис. 2.6 наведено залежності величини області контакту від величини сили прикладеної до штампа. Для штампів циліндричної та еліптичної форм при наближенні області контакту до діаметра штампа притискаюча сила прямує до нескінченності ( $\bar{P} \rightarrow \infty$ ),  $x=1$  є асимптотою, для параболічного та гіперболічного

штампів область контакту необмежено збільшується. Як показали подальші дослідження, для  $\frac{a}{R} > 0.3$  у півплощині виникають великі області пластичної деформації.

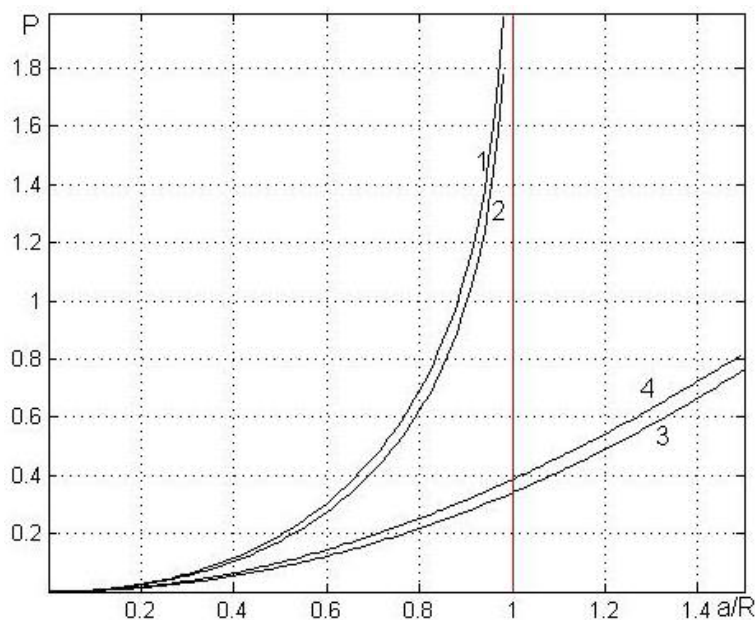


Рис. 2.6

### 2.3. Дослідження умов переходу із пружної до пластичної зон

У підрозділі досліджуються умови появи пластичних зон у пружній півплощині для контактних пар при різних геометричних та фізико-механічних параметрах.

Здатність твердих тіл деформуватися під дією прикладених до них зовнішніх сил та отримувати постійні або тимчасові залишкові деформації при знятті навантаження називається пластичністю. При цьому, між напруженнями і деформаціями, що виникають, і тілі не існує взаємно-однозначної залежності, тобто за відомих напружень не можна знайти деформації та навпаки. В теорії пластичності вивчаються закони, що зв'язують напруження із пружно-пластичними деформаціями і розробляються методи розв'язування задач про рівновагу і рух деформованих твердих тіл. Враховуючи пластичні деформації,



можна знизити концентрацію напружень в конструкціях, підвищити спротив тіл до ударних навантажень, визначити запас міцності, жорсткості та стійкості і тим самим забезпечити раціональне функціонування та надійність конструкцій [52, 112].

На початковому етапі навантаження у тілі виникають лише пружні деформації, і, відповідно, поява пластичних деформацій однозначно визначається діючими напруженнями. У зв'язку з цим, умову пластичності можна записати у вигляді деякої комбінації компонент тензора напружень. Зокрема, для ізотропного матеріалу умова появи пластичних деформацій не залежить від системи координат, тому відповідна функція появи пластичних зон повинна визначатися трьома інваріантами тензора напружень, в якості яких можна взяти три головні напруження [13, 35]:

$$\sigma_{red} = f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) = 0. \quad (2.58)$$

Головна проблема полягає у визначенні (підборі) функції  $f$ , яка в достатній мірі відповідає експериментальним даним [35].

Основними є теорія максимальних напружень, теорія максимальних лінійних деформацій, теорія максимальних дотичних напружень Треска-Сен-Венана, енергетична теорія Хубера-Мізеса-Хенкі та теорія граничних станів Мора. У дисертації проведені дослідження, які ґрунтуються на теорії максимальних дотичних напружень.

Формулювання постулатів у теорії максимальних дотичних напружень Треска-Сен-Венана відображає досліджений експериментами факт, що пластична текучість матеріалу є результатом плину (течіння) матеріалу в площинах дії максимальних дотичних напружень. У формулу (2.58) входить деяка постійна величина, характерна для конкретного матеріалу, яку прийнято називати границею текучості, позначається  $\sigma_T$  (при одноосному розтягу маємо  $\sigma_{xx} = \sigma_T$ ).

Згідно з роботою [35] приймаємо, що перехід з пружного стану в пластичний відбувається, якщо максимальне дотичне напруження досягає деякого граничного значення для даного матеріалу:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (2.59)$$

Варто зауважити, що для більшості пластичних матеріалів границі при розтязі та стисненні однакові, тому за цією теорією міцності можливо із високою ймовірністю достовірно передбачати початок процесу текучості матеріалу [35, 52, 140].

Якщо прийняти, що матеріал після переходу в пластичний стан описується рівняннями ідеальної пластичності з константою межі текучості  $k$ , то значення  $\tau_{\max} = k$  визначає початок межі зони текучості, а лінії рівня дозволяють встановити їх величину і місце знаходження.

Згідно з [43] маємо,  $\bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*} = \frac{\sigma_T}{2E_*}$ , де  $\frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}$  – приведений модуль пружності.

Таблиця 2.1 – Механічні властивості матеріалів

Матеріал	Модуль пружності $E$ , МПа	Коефіцієнт Пуассона, $\nu$	Межа текучості, $\sigma_T$ , МПа
Титан (BT1-1)	$1.12 \cdot 10^5$	0.32	900
Алюмінієвий сплав (B96)	$0.69 \cdot 10^5$	0.34	720
Латунь (Л68)	$0.92 \cdot 10^5$	0.33	520

Дані таблиці 2.1 механічних властивостей матеріалів взяті з [138, 140, 150].

#### **2.4. Дослідження напружено-деформованого стану в середині пружної півплощини**

В даному підрозділі досліджується напружено-деформований стан в середині півплощини, що особливо важливо в контактних задачах.

Важливим фактором при застосуванні чисельної методики обчислення еліптичних інтегралів є можливість обчислення їх значень при визначенні напружень в середині області (у півплощині) у заданих точках розбиття. Особливістю таких обчислень є те, що для побудови 3D-зображення та ліній рівня потрібно якісно задати крок розбиття для сітки. Компоненти напружень мають вигляд [43]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Для подальших числових розрахунків введемо наступне позначення  $G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_*}$ .

Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень (2.60) було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, будувався ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу. Проблемою в таких розрахунках є час отримання зображень, тому що у разі задання великої точності обчислень число операції сумування та добутку зростає в багато разів. Для оптимізації обчислювального процесу було враховано, що контактний тиск разом із підінтегральною функцією в компонентах напружень є парною функцією, та здійснено відображення точок зображення симетрично щодо осі ординат.

Для аналізу напружено-деформівного стану в півплощині та графічного відображення пластичних зон в ній засобами системи Matlab на основі 3D-графіків було побудовано ізолінії рівня із точністю результатів до  $10^{-5}$ . Можливість побудови таких зображень забезпечує функція  $contour(x, y, z)$ , де вхідні параметри – це масиви даних, отриманих на попередніх кроках. Процес побудови ізоліній рівня можна поділити на 2 етапи: перший етап – власне побудови ізоліній із

використанням вищеописаних функцій, а другий – це нанесення на лінії рівня числових даних для подальшого їх аналізу.

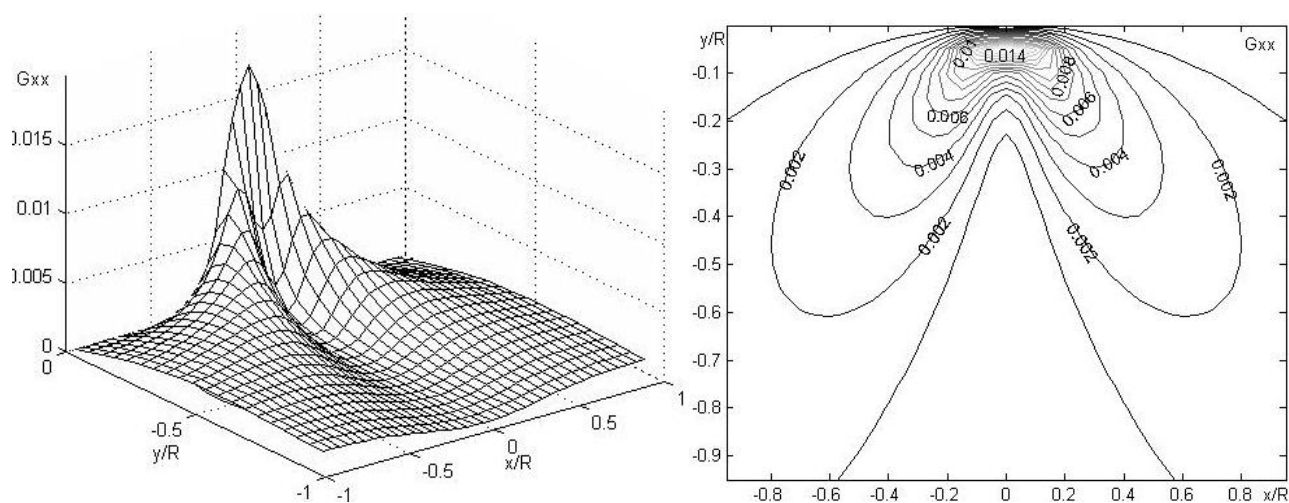


Рис. 2.8

На рис. 2.8 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\sigma_{xx}$  для штампа еліптичної форми при  $a/R = 0.1$  та  $\varepsilon = 0.1$  – зліва за допомогою 3D-зображення, справа за допомогою ліній рівня. На рис. 2.9 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\sigma_{xy}$ , на рис. 2.10 –  $\sigma_{yy}$ .

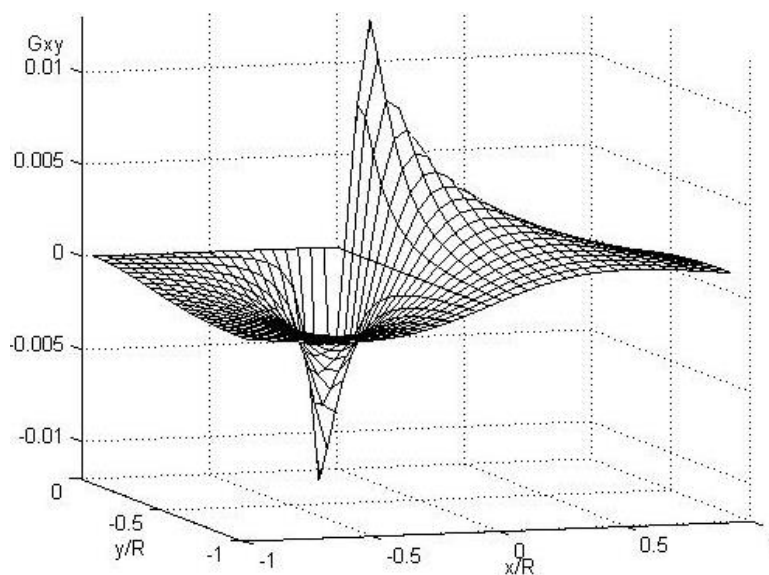


Рис. 2.9

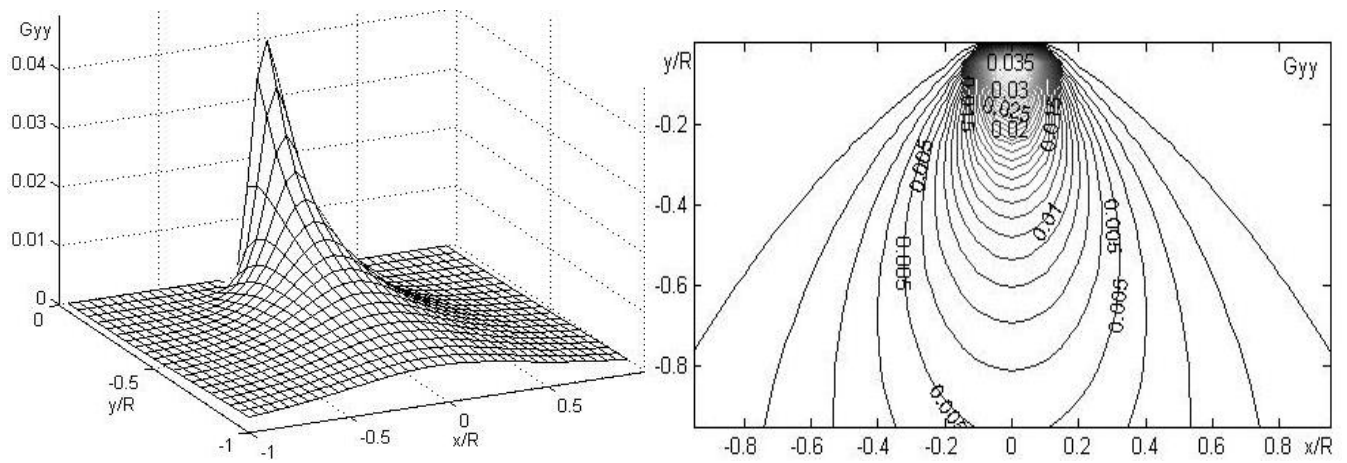


Рис. 2.10

На рис. 2.11 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*}$  для штампа еліптичної форми при  $a/R = 0.1$  та  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0139$  в точці  $(\frac{x_1}{R} = 0; \frac{y_1}{R} = 0.08)$ .

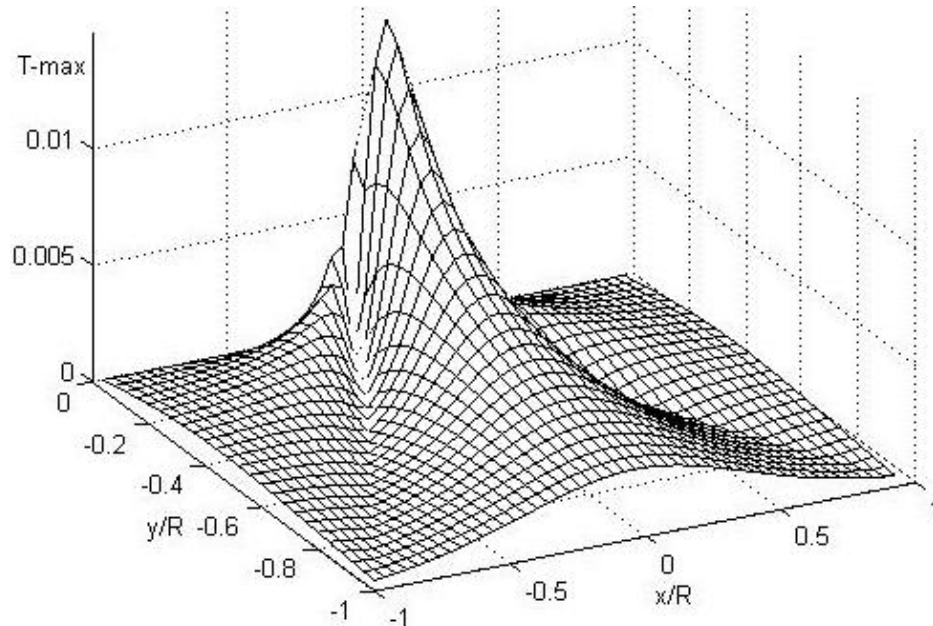


Рис. 2.11

На рис. 2.12 зображено розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  за допомогою ліній рівня для рис. 2.11 та визначено величину пластичної зони при

$k \approx 0,0075$  для першої пари. На рис. 2.12 – величину пластичної зони при  $k \approx 0,0046$  для другої пари.

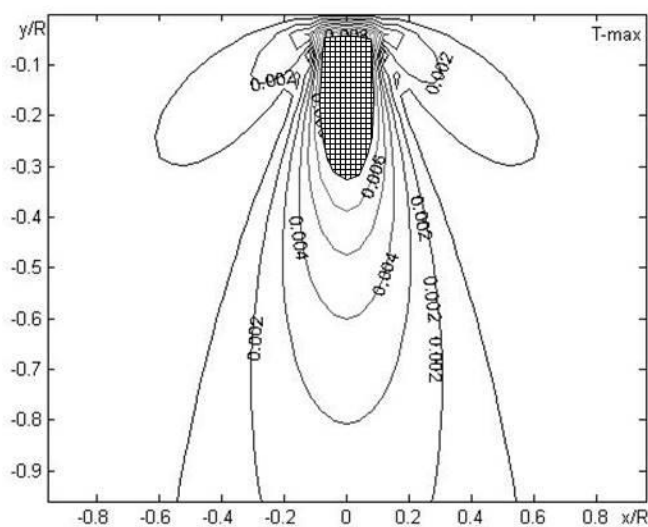


Рис. 2.12

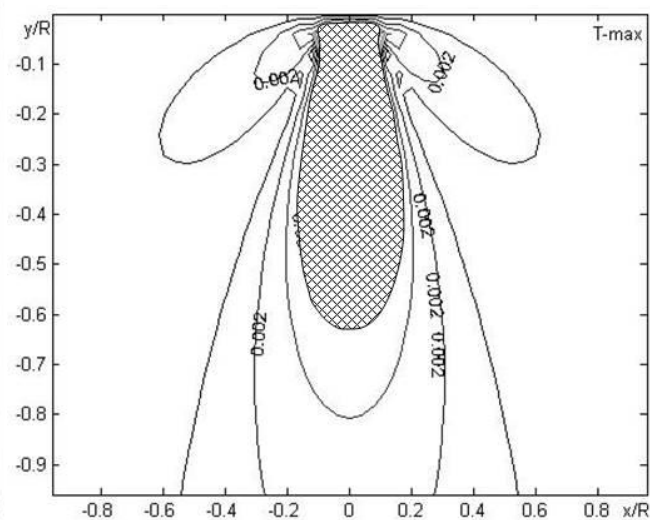


Рис. 2.13

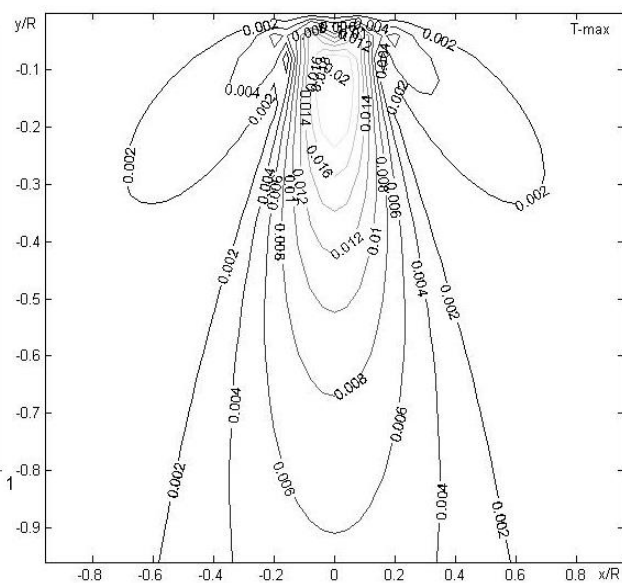
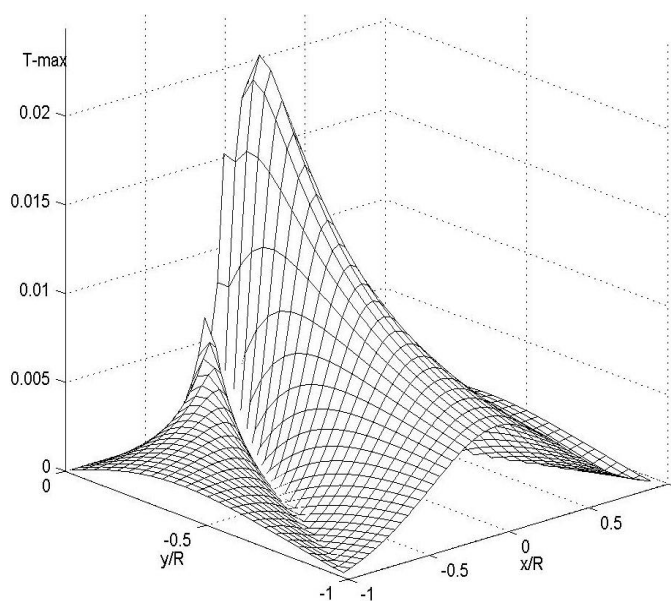


Рис. 2.14

На рис. 2.14 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампа еліптичної форми при  $a/R = 0.15$  та  $\varepsilon = 0.1$ : зліва 3D-рисунок, справа відповідні лінії рівня. На рис. 2.14  $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0214$  у точці  $(\frac{x}{R} = 0; \frac{y}{R} = 0.12)$ .

Для інших штампів графіки компонент напружень при  $a/R = 0.15$  є практично ідентичними з рис 2.14,  $\max \bar{\tau}_{\max}$  для різних штампів має близьке значення і також є найбільшим у точці  $(\frac{x}{R} = 0; \frac{y}{R} = 0.12)$ .

Для гіперболічного штампа при  $\frac{a}{R} = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0202$ , для параболічного –  $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.022$ , для циліндричного –  $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0238$ .

Варто відмітити, що розрахунки компонент напружень при  $a/R \geq 0.3$  є справедливими для матеріалів із високою межею текучості, деякі механічні властивості таких нових матеріалів наведені в [144].

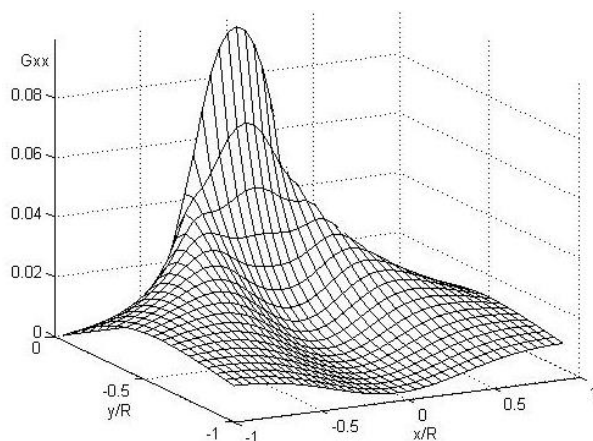


Рис. 2.15

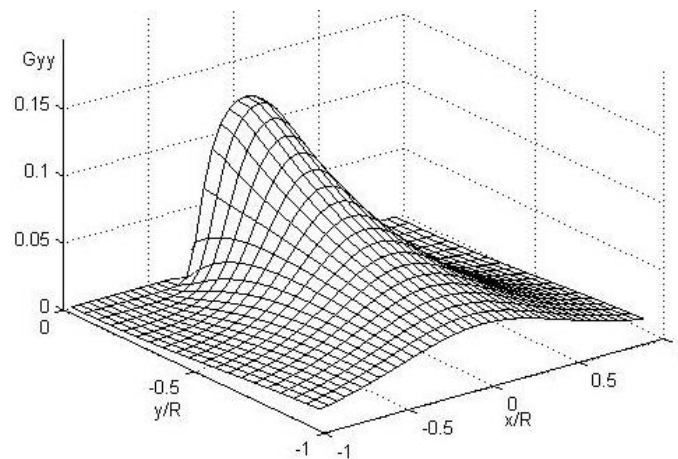


Рис. 2.16

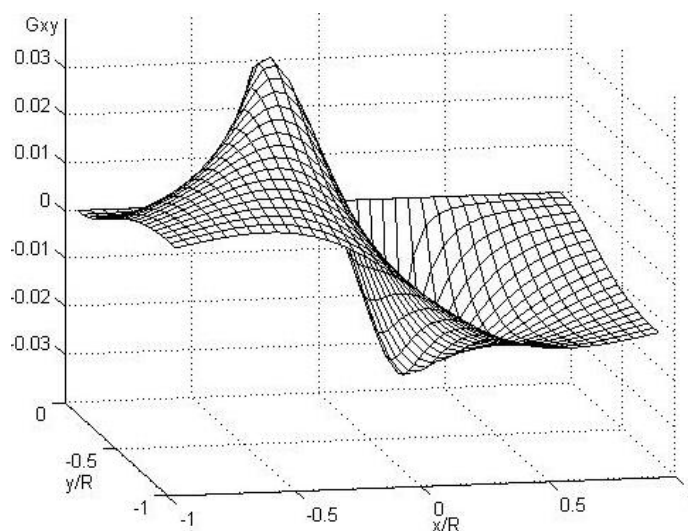


Рис. 2.17

На рис. 2.15 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\sigma_{xx}$  для штампа гіперболічної форми при  $a/R = 0.3$  та  $\varepsilon = 0.1$ . На рис. 2.16 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\sigma_{yy}$ , на рис. 2.17 –  $\sigma_{xy}$ .

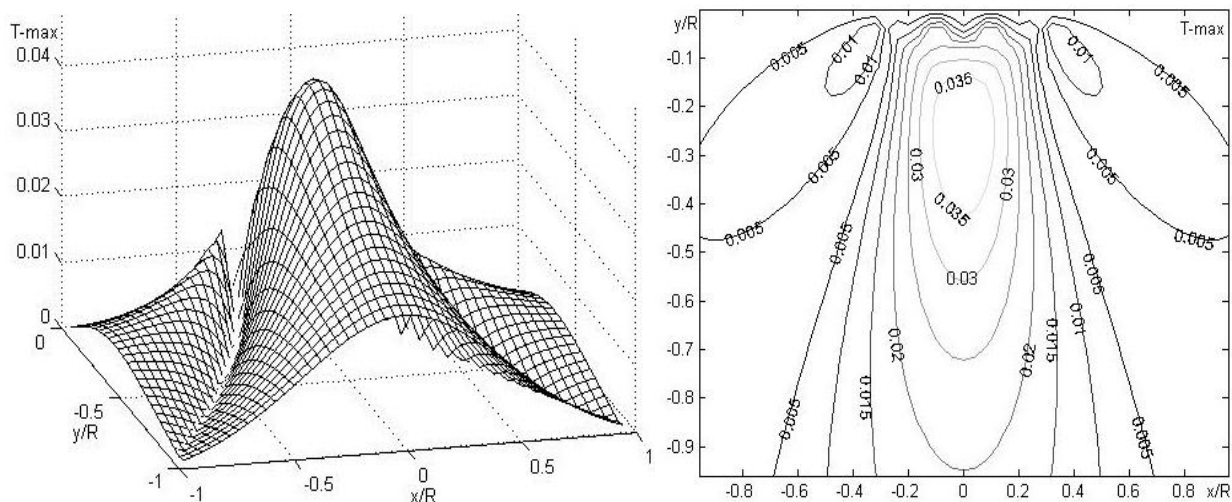


Рис. 2.18

На рис. 2.18 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампа гіперболічної форми при  $a/R = 0.3$  та  $\varepsilon = 0.1$ : зліва 3D-рисунок, справа відповідні лінії рівня. На рис. 2.18 при  $\frac{a}{R} = 0.3$   $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0401$  в точці  $(\frac{x_1}{R} = 0; \frac{y_1}{R} = 0.2400)$ .

На рис. 2.19 наведено розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампа циліндричної форми при  $a/R = 0.3$ : зліва 3D-рисунок, справа відповідні лінії рівня.

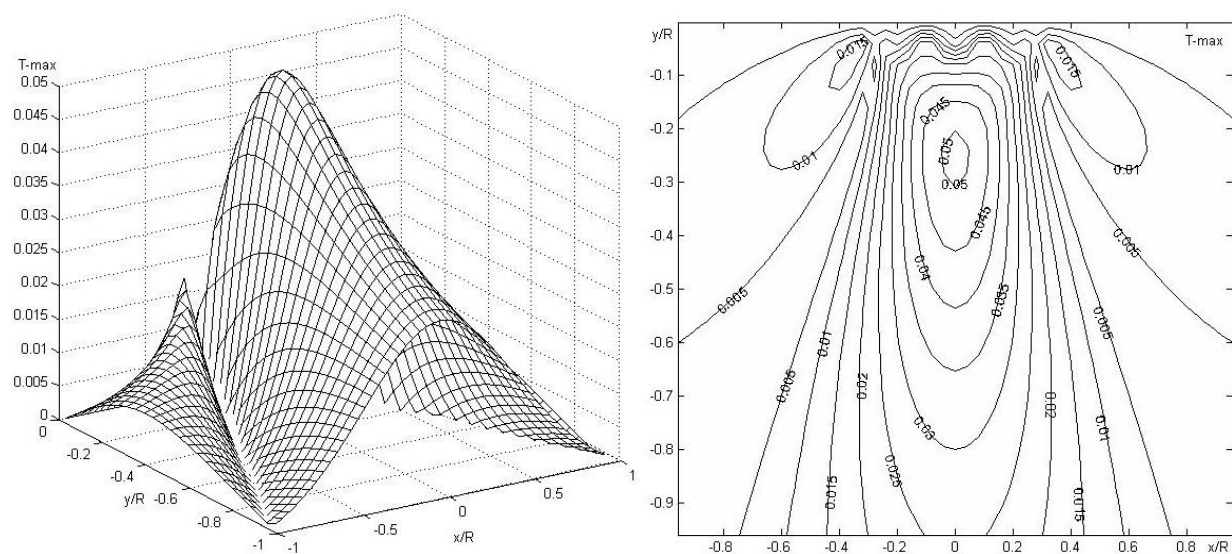


Рис. 2.19



На рис.2.19 при  $\frac{a}{R} = 0.3 \max \bar{\tau}_{\max} = 0.051$  в точці  $(\frac{x_1}{R} = 0; \frac{y_1}{R} = 0.2400)$ .

Отримані в цьому розділі залежності можна використати при побудові експериментально-числової методики для визначення умов появи пластичних зон у тілі для матеріалів з різними механічними властивостями. Розвинута методика дозволяє визначити величину областей текучості, їх межі та характер розподілу із використанням ліній рівня та визначити місця найбільшої концентрації напружень і визначити максимальні значення для різних штампів.

## 2.5. Висновки до другого розділу

У розділі 2 розглянуто задачу про контактну взаємодію жорстких штампів різної форми (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна) із пружною півплощиною для визначення напружено-деформованого стану в пружній півплощині.

1. Проведено дослідження плоских задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною та проведено аналіз особливостей розподілу контактного тиску і напружень у півплощині. Для циліндричного, гіперболічного та еліптичного штампів було знайдено аналітичний розв'язок інтегрального рівняння, який виражається через повні еліптичні інтеграли першого та третього роду.

2. Розглянуто основні типи еліптичних інтегралів, через які визначається контактний тиск, досліджено особливості вхідних параметрів і розроблено способи обчислення таких інтегралів через розклади рядів інтегралів Карлсона у всьому діапазоні значень цих параметрів.

3. В системі Matlab R2013a розроблено схеми обчислення та побудови графіків контактного тиску з використанням спеціальних функцій і вбудованих бібліотек.

4. Розроблено та налагоджено схеми для обрахунку компонент напружень, їх подання у вигляді 3D-зображень та ізоліній рівня, а також визначено межі текучості у півплощині для штампів різної канонічної форми.

5. Отриманий розв'язок дає змогу визначити залежність та місце положення максимального значення  $\tau_{\max}$  від геометричних і механічних параметрів контактної пари та її навантаження, а також визначити пластичні зони для високих концентрацій напружень на основі теорії максимальних дотичних напружень.

У результаті числових експериментів встановлено:

- форма штампа при контакті із пружною півплощиною при областях контакту  $\frac{a}{R} < 0.1$  несуттєво впливає на розподіл контактного тиску для всіх штампів і контактні тиски є близькими до розподілу контактного тиску штампа параболічної форми;
- для всіх форм штампів зберігається тенденція збільшення відстані від поверхні до точки максимуму  $\bar{\tau}_{\max}$  залежно від величини навантаження контактної пари;
- на робочі характеристики фрикційної пари суттєво впливає кривизна штампів;
- на величину межі текучості впливає: область контакту, форма штампа, співвідношення модулів пружності контактної пари та границя текучості матеріалу основи.

### РОЗДІЛ 3

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ТІЛ З ПРУЖНОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ ЗІ ЗНОШУВАННЯМ МАТЕРІАЛУ

У третьому розділі розглянуті контактні задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Проаналізовано числові методи розв'язку таких рівнянь. Розроблена методика розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Проаналізовано числові методи розв'язування узагальненої проблеми на власні значення та проведено їх порівняльний аналіз.

Для знаходження власних значень та векторів застосовано метод Холецького та QZ-факторизації. Проаналізовано теоретичну збіжність даних методів та числову зміну власних значень при збільшенні розмірностей вхідних матриць. Підібрано програмні засоби для написання програмних модулів із можливістю автоматизації процесу розв'язування узагальненої задачі на власні значення та побудови графіків контактного тиску при змінній кількості власних значень (при різній кількості членів ряду для контактного тиску). Для перевірки правильності отриманих власних значень процедура розв'язування узагальненої задачі на власні значення була проведена в різних програмних засобах.

На основі отриманих власних значень проведено числові розрахунки контактного тиску. Розроблено алгоритм пошуку області контакту в будь-який момент часу при заданій силі притискання штампа. Для фіксованих моментів часу було знайдено області контакту при заданій початковій силі. Чисельно встановлено таку кількість членів ряду для контактного тиску, що похибкою можна знехтувати. Розроблено і реалізовано алгоритм приведення до одного масштабу графіків контактного тиску при різних областях контакту. Проведено

аналіз особливості його розподілу для різних форм штампів. Побудовано графіки величини зношування у безрозмірних величинах для наперед заданих областей контакту при заданій сталій силі. Досліджено величину зношування при різних областях контакту для різних штампів. На основі величини зношування проведено аналіз процесу зношування.

Результати розділу опубліковані у працях [129, 133] і доповідались на конференціях [86, 131, 132, 134].

### **3.1. Постановка задачі. Основне сингулярне інтегро-диференціальне рівняння**

Розвиток математичного моделювання процесів тертя та зношування пов'язаний із роботами Костецького Б.І., Крагельського І.В., Чичинадзе А.В., Barber J.R. та ін.. Однак, у більшості моделей зношування використовувались відомі розв'язки Герца для різних форм контактуючих тіл.

Практично недостатньо вирішеною є проблема визначення швидкості зношування та прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар (зубчастих передач, підшипників ковзання та кочення, валів і т.п.). Визначення допустимої величини зношування контактуючих поверхонь, за якої працюючий механізм не вийде з ладу, є актуальною задачею. Процес зношування будемо описувати співвідношенням (абразивна модель зношування) [110]:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_* = k_2 p V, \quad (3.1)$$

де  $v_*$  – зміщення за рахунок зношування,  $k_2$  – коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу,  $p$  – контактний тиск,  $V$  – швидкість взаємного проковзування.

Розглядається контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. У пружну півплощину вдавлюється силою  $P$  жорсткий штамп з основою  $f(x)$ . Крім того,

штамп рухається зі швидкістю  $V$  у напрямку перпендикулярному до площини  
рис. 3.1.

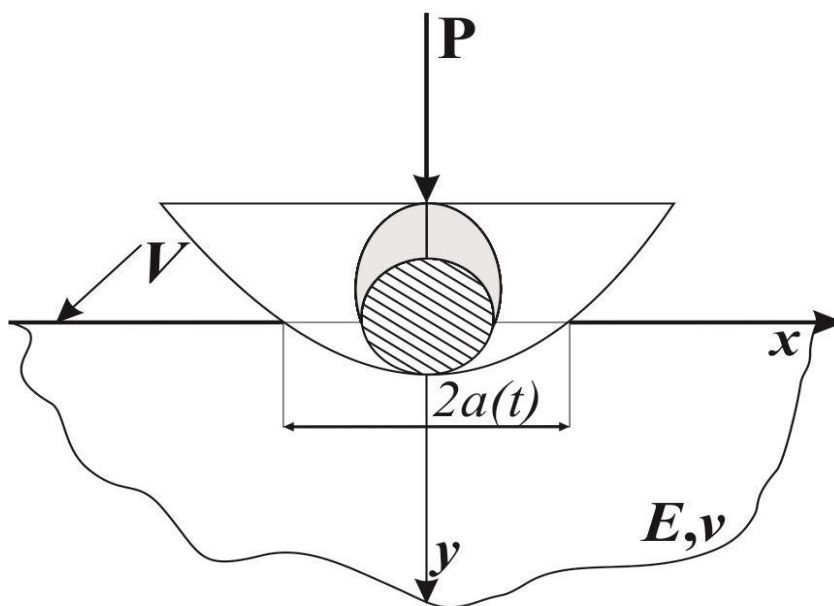


Рис. 3.1

Внаслідок цього відбувається абразивне зношування матеріалу за лінійної залежності сили тертя із силою тиску [36, 110]:

$$v_*(x, t) = k_2 V \int_0^t p(x, t) dt, \quad (3.2)$$

де  $p(x, t)$  – контактний тиск.

Припустимо, що сила тертя зв'язана з контактним тиском законом Кулона із коефіцієнтом тертя  $k_1$ . У випадку лінійної моделі зношування сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (3.3) матиме вигляд [110]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (3.3)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)}.$$

Контактний тиск у кожен момент часу  $t$  повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dx, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (3.4)$$

Варто зауважити, що область контакту змінна в часі, а контактний тиск залежить від просторової та часової координати.

### 3.2. Методика зведення розв'язку інтегрального рівняння до узагальненої проблеми на власні значення

Для розв'язування інтегро-диференціального рівняння використаємо метод розділення змінних з подальшим використанням поліномів Чебишова. Аналогічний підхід до розв'язування такого типу задач був використаний у роботах Галіна Л.О. (зношування балки жорстким штампом) [30], де контактний тиск знаходився з умов взаємодії контактуючих тіл, що враховує зношування.

Контактний тиск шукаємо у вигляді:

$$p(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k}t}. \quad (3.5)$$

Для подальших міркувань та зручності числових розрахунків введемо безрозмірні величини:  $p(x,t) = p'(x',t')\alpha$ ,  $f(x) = f'(x')a$ ,  $x' = \frac{x}{a}$ ,  $t = t'a/(\alpha k_1 k_2 V)$ , надалі штрихи упускаємо.

Підставивши (3.5) у рівняння (3.3), інтегруючи по  $t$  та прирівнюючи члени в правій та лівій частині при  $t^0$  та  $(1 - e^{-\alpha_{2k}t})$ , отримаємо систему інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь, одне з яких неоднорідне (3.6), а інші однорідні (3.7):

$$\int_{-1}^1 p(\tau,0) \frac{d\tau}{\tau-x} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (3.6)$$

$$\alpha_{2k} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}(\tau) \frac{d\tau}{\tau-x} - \frac{d\varphi_{2k}(x)}{dx} = 0, \text{ при } k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Варто зауважити, що запис контактного тиску у вигляді (3.5) є достовірним, бо  $\alpha_{2k}$  – власні значення для задачі (3.7) і відповідно  $e^{-\alpha_{2k}t}$  – лінійно незалежні функції.

Згідно з [110] подаємо власні функції  $\varphi_{2k}(x)$  у вигляді рядів за поліномами Чебишова другого роду (штамп має заокруглені краї). Відомо [84], що функції

$\varphi_{2k}(x)$  утворюють базис в просторі  $L_2$ . Із врахуванням умови (3.4) вони мають вигляд:

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x), \quad (3.8)$$

де  $U_n(x)$  – поліноми Чебишова другого роду.

Для подальших математичних перетворень використано відомі [84, 142] формули для поліномів Чебишова:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x)} = \pi U_{n-1}(x), \quad \int_{-1}^1 U_n(\tau) \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-x)} d\tau = \pi T_{n+1}(x), \quad (3.9)$$

де  $T_n(x)$  – поліноми Чебишова першого роду.

Також згідно з [142]:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, m \neq k, \\ \pi/2, m = k. \end{cases} \quad (3.10)$$

Із формул (3.10) випливає, що:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x)} = 0. \quad (3.11)$$

Оскільки  $T_0(x) = T_2(x) + 2(1-x^2)U_0(x)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_0(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x)} &= \int_{-1}^1 \frac{T_2(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x)} + 2 \int_{-1}^1 U_0(\tau) \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-x)} d\tau = \pi(U_1(x) - 2T_1(x)) = \\ &= \pi(2x - 2x) = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи (3.5), (3.11) у рівняння (3.6) отримаємо наступне рівняння:

$$a_{2k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} (2m+1) = 0. \quad (3.12)$$

Домножаючи кожен член рівняння (3.12) на  $T_{2i+1}(x)$  при  $i = \overline{1, n}$  та інтегруючи від -1 до 1, отримуємо узагальнену задачу на власні значення:

$$(A - a_{2k} B) X = 0, \quad (3.13)$$

де  $\alpha_{2k}$  – власні значення,  $a_m^k$  – власні вектори, а  $X = X(a_0^k, a_1^k, \dots)$ .

Матриці  $A$  і  $B$  мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 3/2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{2n+1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij})_{m,n}, \quad \text{де } b_{ij} = \int_{-1}^1 T_{2i+1}(x)T_{2j+1}(x)dx. \quad (3.14)$$

Матриця  $A$  є діагональною і заповнюється згідно (3.14). Кожен елемент матриці  $B$  є інтегралом від добутку двох поліномів Чебишова першого роду. Матриці  $A$  і  $B$  є додатньо визначеними та симетричними, тому згідно з працями [29, 51, 60, 154], всі власні значення є дійсними і мають той же знак, що і власні значення задачі  $(A - a_{2k}I)X = 0$ , тобто є додатними (3.13). Варто зауважити, що матриця  $B$  є не одиничною і задача (3.13) не може бути зведена до стандартної.

На даний час не існує теоретично доведених алгоритмів для прямого розв'язку узагальненої задачі на власні значення [29, 60, 154, 175, 176]. Існує декілька підходів, які дозволяють розв'язати узагальнену проблему на власні значення наближеними методами. Ці підходи можна умовно поділити на дві групи: до першої належать алгоритми, які потребують попередньо спеціального зведення матриць до певної стандартної форми (узагальнений метод Якобі, метод Холецького) [177], і початкові (вхідні) матриці мають бути додатньо визначені та симетричні; до другої ітераційні методи, що не потребують спеціального зведення QZ, QW-алгоритм факторизації [154, 175, 176].

Нагадаємо, що матриця  $B$  розміром  $n \times n$  називається додатньо визначеною якщо  $\langle Bx, x \rangle > 0$  для будь яких  $n$ -векторів  $x$ .

Згідно з [154, 177], матриця  $B$  є симетричною додатньо визначеною тоді і тільки тоді, коли існує нижня трикутна матриця  $L$ , така, що  $B = LL^T$ . При цьому матриця  $L$  – має однозначний запис. Представлення  $B = LL^T$  називається розкладом Холецького.

Елементи матриці  $L$  можна обчислити, починаючи з верхнього лівого кута матриці за формулами:



$$l_{ii} = \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} (b_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}), \quad \text{якщо } j < i. \quad (3.15)$$

Вираз у правій частині (3.15) під коренем завжди додатній, якщо матриця  $B$  - додатньо визначена.

Якщо для матриці  $B$  відомий розклад Холецького, то рівняння (3.13) набере вигляду:

$$AX = \lambda LL^T X, \quad L^{-1}AX = \lambda L^T X. \quad (3.16)$$

Проведемо заміну змінних  $y = L^T X$  або  $X = L^{-T} y$ . Тоді рівняння (3.13) матиме вигляд:

$$L^{-1}AL^{-T} y = \lambda y, \quad \text{при } \bar{A} = L^{-1}AL^{-T} \text{ маємо } \bar{A}y = \lambda y. \quad (3.17)$$

Таким чином, узагальнена задача (3.13) зводиться до стандартної задачі на власні значення із симетричною матрицею  $\bar{A}$ .

Метод QZ - факторизації матриць також полягає у приведенні матриць (3.14) до спеціальної форми і зведенні узагальненої задачі до стандартної. Особливістю даного методу є те, що він підходить і для несиметричних матриць, які не є обов'язково додатньо визначеними [175, 176].

Нехай  $A \in R^{n \times n}$ . Матриця  $A$  є факторизованою у формі QZ, якщо

$$A = QZ, \quad (3.18)$$

де матриця  $Q$  є ортогональною матрицею, тобто  $Q^T Q = Q Q^T = I_{n \times n}$  [175] і матриця  $Z$  – це дійсна матриця, в якій додатними є лише діагональні елементи [175].

Алгоритм факторизації (3.18) є новим, його основні етапи наведено в роботі [175]. Також доведено його теоретичну збіжність та спосіб приведення матриці  $A$  за допомогою загального алгоритму QW.

Розробка алгоритмів згідно QW та QZ-факторизації є актуальною задачею із прикладним застосуванням у галузі механіки [60].

На основі отриманих вхідних даних знайдено власні вектори та значення за описаним методом розкладу Холецького. Для достовірності отриманих результатів задачу на власні значення (3.13) було розв'язано методом QZ-

факторизації. Важливо зауважити, що власні значення  $\alpha_{2k}$  за обома методами співпадають, але власні вектори  $a_m^k$  однакові з точністю до постійного множника. Важливо, що розв'язок системи (3.7) не залежить від форми штамп.

При побудові ряду контактного тиску за формулою (3.5) важливим чинником є кількість членів ряду, тобто скільки власних значень взято для обчислень. В таблиці 3.1 наведено власні значення при  $n = 7, 11, 17$  для узагальненої проблеми (3.13), де  $n$  – кількість членів ряду (3.5).

Таблиця 3.1 – Власні значення для матриць із (3.16) при їх розмірності  $n=7,11,17$

n=7	0.63	1.63	2.62	3.63	4.84	7.48	23.22				
n=11	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.68	8.11	10.88	17.45	55.49
n=17	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.63	7.63	8.63	9.63	10.72
	12.16	14.38	18	24.8	40.44	129.98					

У ході числового експерименту було виявлено, що для побудови ряду (3.5) при  $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$  (штамп параболічної форми), де  $R$  – радіус кривизни в точці  $x=0$ , достатньо одинадцяти власних значень. Досліджено, що при малих областях контакту така кількість векторів є достатньою для гіперболічної, циліндричної, еліптичної форм штампів. Однак, для знаходження невідомих областей контакту при заданій силі для забезпечення похибки обчислень  $10^{-5}$  кількість власних значень має бути не менше сімнадцяти, тобто  $n \geq 17$  і за такої кількості власних значень запропонований метод є достатньо добре збіжним.

Таблиця 3.2 – Власні вектори для (3.13) за розкладом Холецького

1.0093	-0.5643	0.4284	0.3578	-0.3131	-0.2822	0.2751	-0.3183	-0.3949	0.5183	0.9364
-0.2934	-0.6339	0.5161	0.4297	-0.3713	-0.3303	0.3180	-0.3630	-0.4404	0.5627	0.9676
0.0028	0.5743	0.2256	0.3473	-0.3545	-0.3382	0.3369	-0.3943	-0.4828	0.6162	1.0116
-0.0050	-0.1114	-0.6779	-0.1450	-0.0926	-0.1924	0.2496	-0.3449	-0.4731	0.6513	1.0593
-0.0023	0.0185	0.2886	-0.5887	0.3827	0.1618	-0.0133	-0.1412	-0.3497	0.6325	1.1016
-0.0013	0.0021	-0.0704	0.4574	0.3481	0.4367	-0.3474	0.2073	-0.0705	0.5191	1.1286
-0.0008	0.0019	0.0062	-0.1720	-0.5433	0.0446	-0.3455	0.4704	0.3123	0.2799	1.1283
-0.0005	0.0013	-0.0028	0.0352	0.3053	-0.5030	0.2157	0.2616	0.5798	-0.0761	1.0868
-0.0004	0.0009	-0.0013	-0.0078	-0.0965	0.4280	0.3742	-0.3548	0.4255	-0.4645	0.9881
-0.0003	0.0006	-0.0010	-0.0007	0.0240	-0.1898	-0.5011	-0.3752	-0.1745	-0.7123	0.8132
-0.0002	0.0005	-0.0008	-0.0012	-0.0020	0.0558	0.2430	0.4758	-0.5849	-0.6113	0.5327

Таблиця 3.3 – Власні значення для (3.14) при n=11 QZ-метод

55.4891	17.4561	10.8892	0.6386	1.6314	8.1159	2.6292	3.6282	6.6757	4.6276	5.6278
---------	---------	---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Таблиця 3.4 – Власні вектори для (3.13) за розкладом QZ

0.8297	-0.7276	0.6750	-1	-0.8902	-0.6688	-0.6319	0.6078	0.5490	0.5763	-0.5610
0.8573	-0.7900	0.7530	0.2907	-1.0000	-0.7629	-0.7613	0.7300	0.6346	0.6835	-0.6568
0.8964	-0.8651	0.8254	-0.0028	0.9060	-0.8287	-0.3328	0.5899	0.6724	0.6525	-0.6724
0.9386	-0.9143	0.8088	0.0049	-0.1758	-0.7248	1.0000	-0.2464	0.4981	0.1705	-0.3826
0.9761	-0.8880	0.5979	0.0023	0.0292	-0.2968	-0.4258	-1.0000	-0.0266	-0.7044	0.3217
1.0000	-0.7287	0.1205	0.0013	0.0034	0.4357	0.1038	0.7769	-0.6933	-0.6407	0.8682
0.9998	-0.3930	-0.5339	0.0008	0.0031	0.9886	-0.0092	-0.2922	-0.6895	1.0000	0.0887
0.9630	0.1068	-0.9912	0.0005	0.0020	0.5497	0.0042	0.0597	0.4305	-0.5620	-1.0000
0.8755	0.6521	-0.7275	0.0004	0.0014	-0.7457	0.0019	-0.0132	0.7468	0.1776	0.8509
0.7205	1.0000	0.2984	0.0003	0.0010	-0.7885	0.0015	-0.0011	-1.0000	-0.0442	-0.3774
0.4720	0.8582	1.0000	0.0002	0.0008	1.0000	0.0012	-0.0021	0.4849	0.0038	0.1110

Важливо відмітити, що власні значення (таблиця 3.1, таблиця 3.3) за обома методами співпадають і є додатними. Для методу QZ-факторизації порядок значень є відмінним від розкладу Холецького, у зв'язку із особливістю алгоритмів розкладу вхідних матриць в QZ-методі. Власні вектори (таблиця 3.2, таблиця 3.4) однакові з точністю до постійного множника. Ці особливості не впливають на подальші розрахунки і числові результати за обома методами повністю співпадають.

Для однозначного визначення  $a_m^k$ , функції  $\varphi_{2k}(x)$  запишемо у вигляді [110]:

$$\varphi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x), \quad (3.19)$$

і, підставивши у рівняння (3.6), дістаємо співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{m=0}^n a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) = -\frac{df(x)}{dx}. \quad (3.20)$$

Домножаючи кожен член (3.20) на  $T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$  при  $i = \overline{1, n}$  та інтегруючи від -1 до 1, отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$CX = b, \quad (3.21)$$

де

$$C = \frac{-\pi^2}{2} \begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \dots & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

$b$  – стовпчик вільних членів, елементи якого задаються за наступною формулою:

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}, \quad b_i = \int_{-1}^1 -f'(x) T_{2i+1}(x) / \sqrt{1-x^2} dx, \quad \text{при } i = \overline{1, n}. \quad (3.23)$$

Для параболічної форми штампа елементи стовпчика вільних членів (3.23) можна знайти аналітично без додаткових заміни. Для інших штампів канонічної форми, щоб знайти елементи (3.23), потрібно провести заміну  $x = \cos(\varphi)$ . Проведемо процедуру заміни для штампа циліндричної форми  $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$ , де  $R$  – радіус циліндра. Похідна матиме вигляд:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{a}{R} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{a}{R} \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 (x)^2}}.$$

Згідно з вищеприйнятими позначеннями вважаємо, що  $x' = \frac{x}{a}$  (штрихи опускаємо).

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_{-1}^1 \frac{a}{R} \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 x^2}} \frac{T_{2i+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2a}{R} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 x^2}} \frac{T_{2i+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= \left. \begin{array}{l} x = \cos \varphi \\ dx = -\sin \varphi d\varphi \\ \varphi_0 = \arccos(0) = \pi/2 \\ \varphi_1 = \arccos(1) = 0 \end{array} \right| = \frac{2a}{R} \int_0^1 \frac{\cos \varphi (-\sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\cos(2i+1) \arccos(\cos \varphi)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} d\varphi = \\
&= -\frac{2a}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2i+1)\varphi)}{\sin \varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi = -\frac{2a}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2i+1)\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Після математичних перетворень, аналогічних до вищеописаних, інтеграл (3.24) матиме вигляд для всіх штампів:

$$b_i = -(1 \pm \varepsilon) \frac{2a}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2i+1)\varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt{1 \pm \frac{a}{R} \cos^2(\varphi)}} d\varphi, \text{ при } i = \overline{1, n}. \quad (3.25)$$

Знак «+» у знаменнику відповідає штампу гіперболічної форми, знак «-» – відповідає штампу еліптичної форми, а знак «-» та  $\varepsilon = 0$  – штампу циліндричної форми.

Розв'язавши систему (3.21), із використанням вбудованої функції *mldivide(C,b)*, яка використовує LU-декомпозицію, що є різновидом методу Гаусса, було отримано коефіцієнти  $d_k$  [34, 172]. Маючи власні значення, власні вектори, та сталі множники  $d_k$ , підставляємо їх у (3.19) для побудови графіків контактного тиску і визначення інших необхідних даних [110].

### 3.3. Особливості розподілу контактного тиску при зношуванні пружної півплощини штампами канонічної форми

При графічному відображенні результатів контактного тиску було враховано зміну області контакту  $a(t)$ . Тобто, щоб відобразити на одному графіку контактний тиск у різні моменти часу, було розроблено алгоритм зведення

отриманих числових даних до однієї системи координат із урахуванням пропорційності відношення поточної області контакту в момент часу  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) до початкової в момент часу  $t_0 = 0$  (задача без зношування).

Алгоритм знаходження області контакту в довільний момент часу такий: у момент часу  $t_0 = 0$  задача розв'язана іншим способом [120, 121] (для сили  $P$  знайдено  $a_0$ ); у наступний момент часу  $t = t_i$  приймаємо, що  $a(t_i) = a_i$ , проводимо всю процедуру знаходження контактної тиску (3.5) за схемою, описаною вище, підставляємо контактний тиск в умову рівноваги (3.4) і порівнюємо знайдену силу  $P_i$  з  $P$ , при  $P_i > P$  зменшуємо  $a_i$  і навпаки. Цей процес повторюємо для кожного наступного  $t_{i+1} > t_i$ .

Результати розв'язку задачі при  $t_0 = 0$  повністю співпадають із отриманими результатами в другому розділі при розв'язуванні плоскої задачі без зношування, опосередковано це також показує рис.3.2. Варто відмітити, що в другому розділі розв'язок інтегрального рівняння задачі було знайдено аналітичним способом і виражено через повні еліптичні інтеграли першого та третього роду, однак у зв'язку із поганою збіжністю цих інтегралів близько точки  $x = 0$  при  $\varphi \approx 90^\circ$  результати дають незначну похибку при  $\frac{a}{R} > 0.3$ . Аналітико-числовий метод поліномів Чебишова має кращу збіжність і похибка обчислень навіть для більших областей контакту є дуже незначною. На рис. 3.2 показано контактний тиск для штампа еліптичної форми при заданій силі  $P = 0.0552$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.1$ ,  $\varepsilon = -0.1$  при  $t_0 = 0$ .

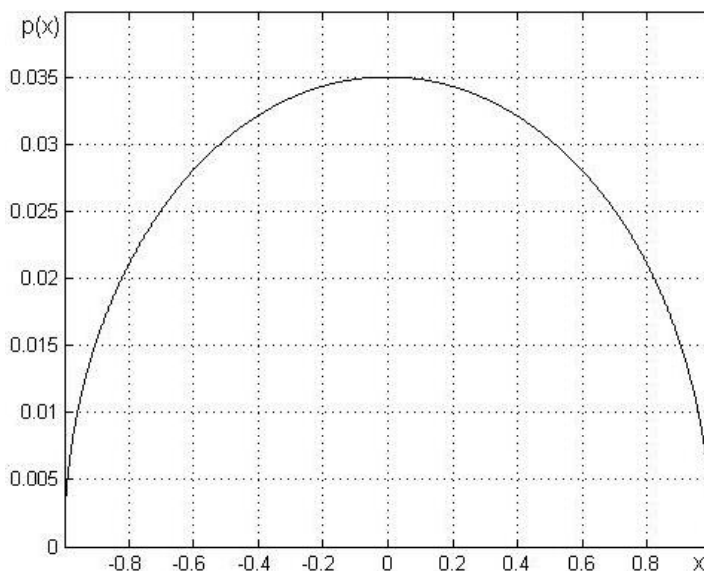


Рис. 3.2

При малих областях контакту при  $\frac{a_0}{R} < 0.1$  процес зношування для всіх штампів є практично ідентичним при невеликих різницях кривизни штампів в точці  $x = 0$ . Наприклад, (рис. 3.3) контактний тиск для штампа гіперболічної форми при заданій силі  $P = 0.0502$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.1$ ,  $\varepsilon = -0.1$  у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.1118$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.112$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.1322$ . Де ліва частина – контактний тиск, справа відповідні величини зношування.

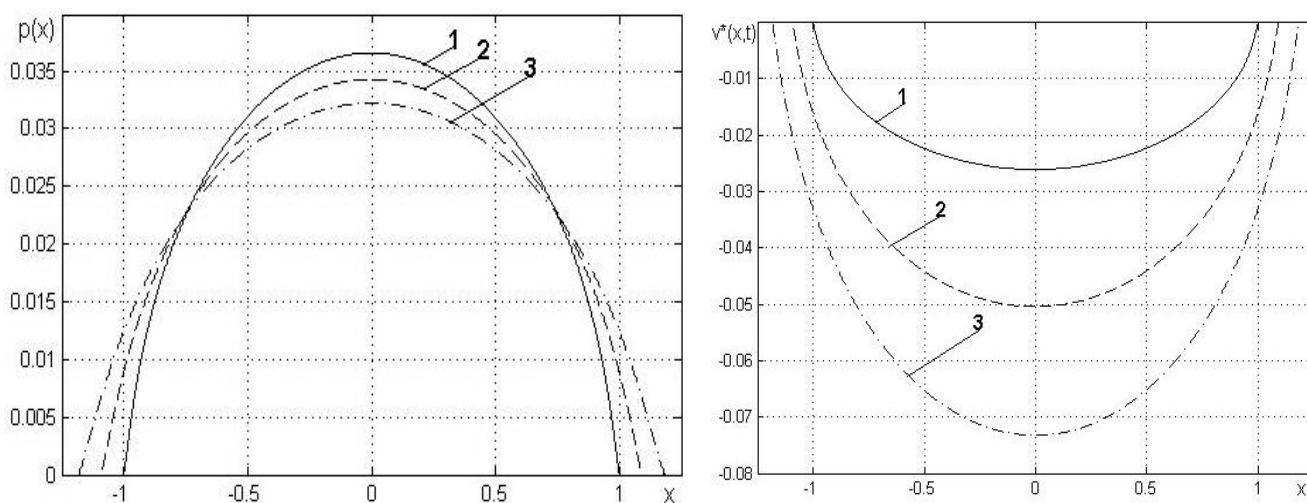


Рис. 3.3

Варто відмітити, що вже при  $\frac{a_0}{R} > 0.15$  процес зношування пружної півплощини різними штампами має відмінності, зокрема, при однаковій початковій силі, та однакових проміжках безрозмірного часу  $t_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  для різних штампів маємо різні початкові області контакту та відповідно до них різні області контакту, що отримуються у процесі зношування, зокрема, найбільша для штампа еліптичної форми ( $\frac{a_5}{R} = 0.3036$ ) рис. 3.4, другою по величині є область для параболічного штампа ( $\frac{a_5}{R} = 0.2819$ ) рис. 3.5, та найменшою для штампа циліндричної форми ( $\frac{a_5}{R} = 0.2747$ ) рис. 3.6. Однак, графіки контактного тиску для всіх трьох випадків мало відрізняються (якісно і кількісно).

Контактний тиск (рис. 3.4) для штампа еліптичної форми при заданій силі  $P = 0.0914$  та відповідній їй початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.2$ ,  $\varepsilon = -0.1$  у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.2233$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.243$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.2628$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.2819$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.3036$ .

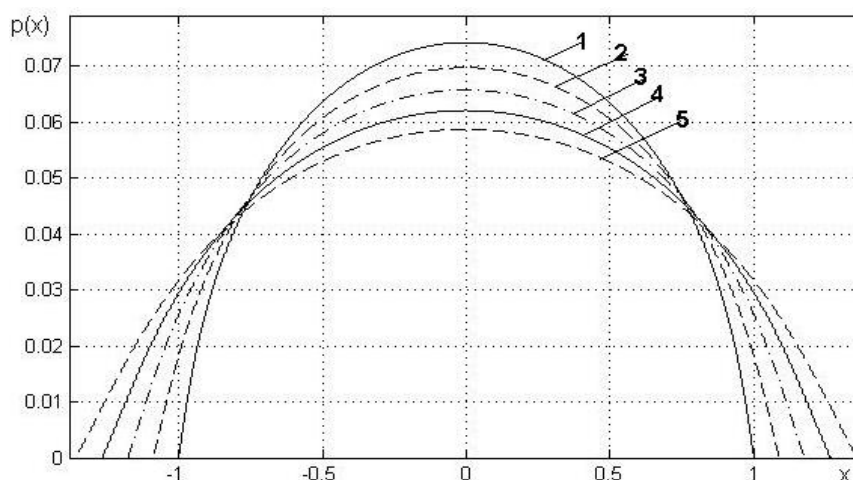


Рис. 3.4



Контактний тиск (рис. 3.5) для штампа параболічної форми при заданій силі  $P = 0.0914$  та відповідній їй початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.1827$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.2044$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.2233$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.2425$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.2621$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.2819$ .

Контактний тиск (рис. 3.6) для штампа циліндричної форми при заданій силі  $P = 0.0914$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.1806$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.2014$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.2197$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.2375$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.2564$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.2747$ .

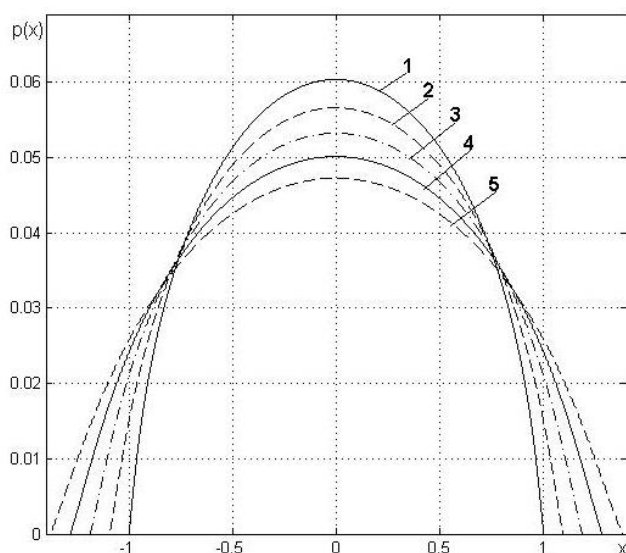


Рис. 3.5

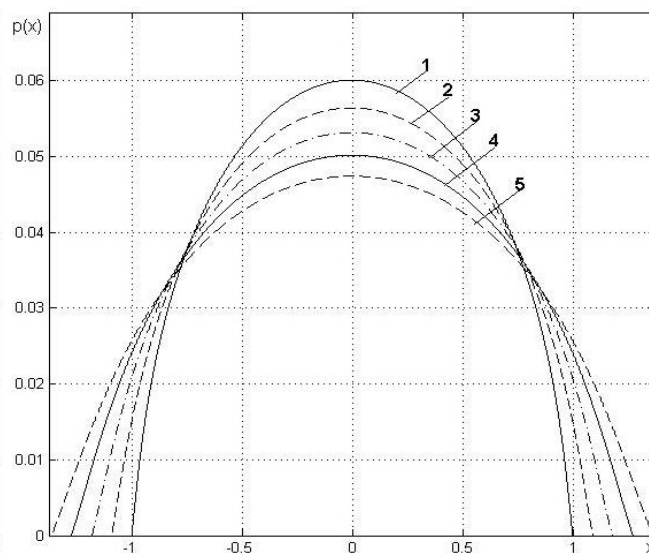


Рис. 3.6

При збільшенні початкової сили  $P$  в 2 рази варто відмітити, що для всіх 4-ох форм штампів в кінцевий момент часу роботи фрикційної пари  $t_5$  для штампа

циліндричної форми кінцева область контакту  $\frac{a_5}{R}$  приблизно збільшується в 1,86 разів (рис. 3.7), а для штампа гіперболічної форми – у 2 рази (рис. 3.8).

Контактний тиск для штампа циліндричної форми (рис.3.7) при заданій силі  $P = 0.1828$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.3485$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.3863$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.4185$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.4502$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.4816$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.5125$ .

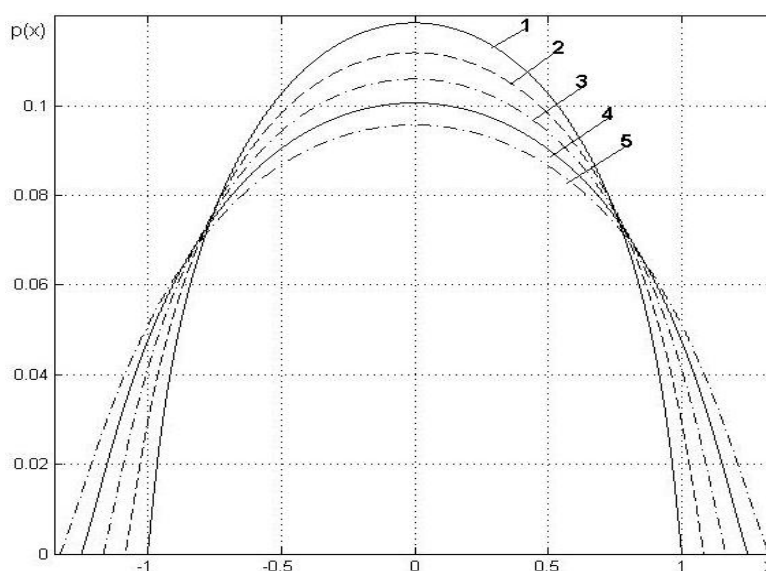


Рис. 3.7

Контактний тиск для штампа гіперболічної форми (рис.3.8) при заданій силі  $P = 0.1828$ ,  $\varepsilon = 0.1$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.3432$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.3865$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.4252$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.4655$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.5075$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.553$ .

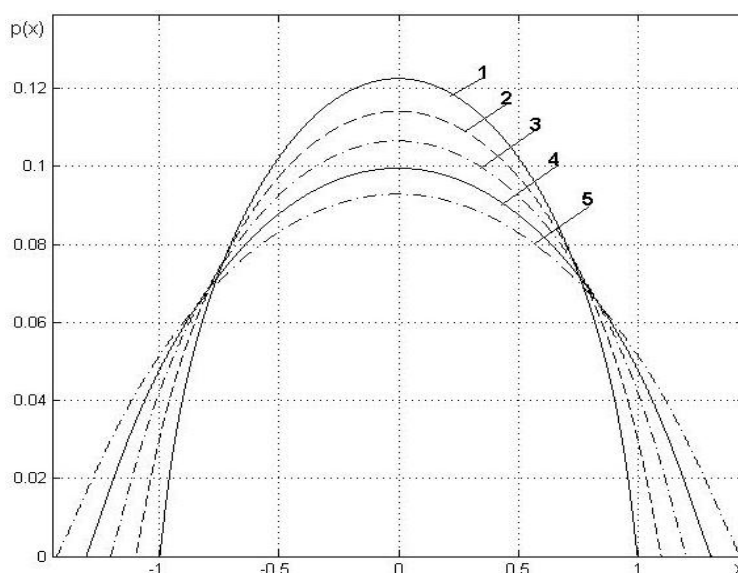


Рис. 3.8

На рис.3.9 наведено контактний тиск для штампа циліндричної форми при заданій силі  $P = 0.1015$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.2$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$  було знайдено наступні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.223$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.242$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.263$ . Крива 1 на цьому рисунку відповідає часу  $t_0 = 0$ , крива 2 –  $t_1$ , крива 3 –  $t_2$ , крива 4 –  $t_3$ . Рис. 3.9 наочно ілюструє зміну контактного тиску в процесі зношування відносно початкової області контакту  $\frac{a_0}{R}$  та показує, що зі збільшенням часу роботи в кожен наступний момент часу  $t$  зменшується його максимум в точці  $x = 0$ .

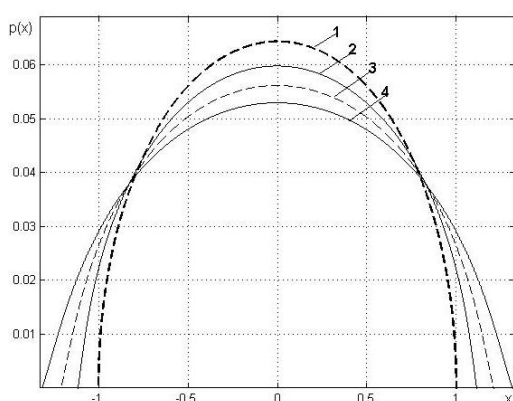


Рис. 3.9

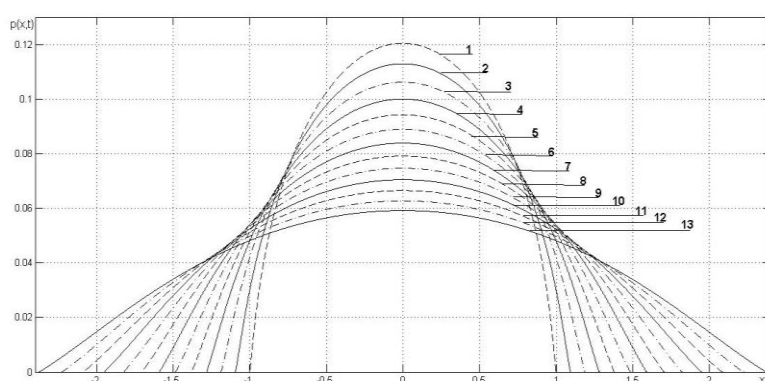


Рис. 3.10

На рис. 3.10 наведено контактний тиск для штампа параболічної форми при заданій силі  $P = 0.1828$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.36516$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$ ,  $t_6 = 0.57$ ,  $t_7 = 0.665$ ,  $t_8 = 0.76$ ,  $t_9 = 0.855$ ,  $t_{10} = 0.95$ ,  $t_{11} = 1.045$ ,  $t_{12} = 1.14$ ,  $t_{13} = 1.235$  було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.4079$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.4458$ ,  $\frac{a_3}{R} = 0.484$ ,  $\frac{a_4}{R} = 0.5225$ ,  $\frac{a_5}{R} = 0.5625$ ,  $\frac{a_6}{R} = 0.605$ ,  $\frac{a_7}{R} = 0.6487$ ,  $\frac{a_8}{R} = 0.695$ ,  $\frac{a_9}{R} = 0.7434$ ,  $\frac{a_{10}}{R} = 0.7956$ ,  $\frac{a_{11}}{R} = 0.85$ ,  $\frac{a_{12}}{R} = 0.907$ ,  $\frac{a_{13}}{R} = 0.968$ .

Варто відмітити, що для штампа параболічної форми найбільше зношування півплощини відбувається у перші моменти часу, а з кожним наступним проміжком інтенсивність зношування зменшується. Графік такого зношування показано на рис. 3.10.

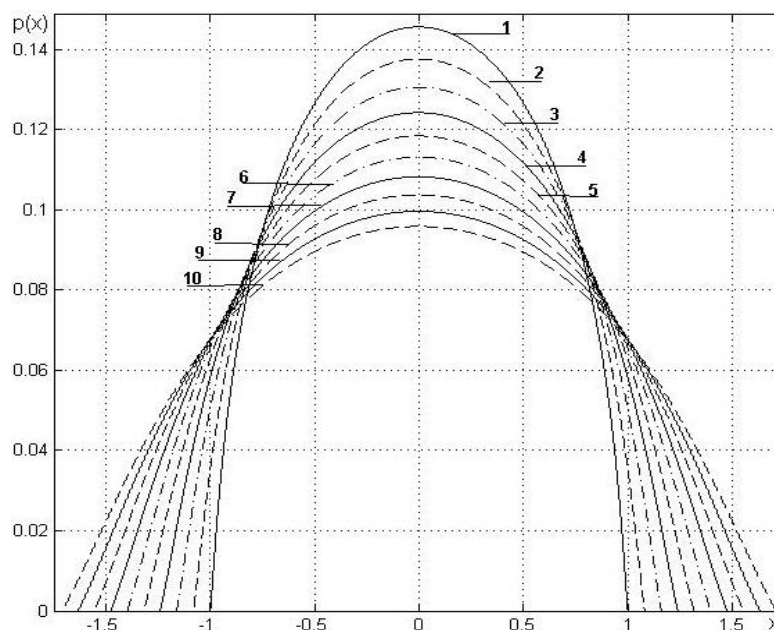


Рис. 3.11

На рис. 3.11 наведено контактний тиск для штампа еліптичної форми при заданій силі  $P = 0.1828$  та відповідній їй області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.383$ ,  $\varepsilon = -0.1$  у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$ ,

$t_6 = 0.57, t_7 = 0.665, t_8 = 0.76, t_9 = 0.855, t_{10} = 0.95$  було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_1}{R} = 0.4237, \frac{a_2}{R} = 0.458, \frac{a_3}{R} = 0.4921, \frac{a_4}{R} = 0.5253, \frac{a_5}{R} = 0.5587,$

$\frac{a_6}{R} = 0.5925, \frac{a_7}{R} = 0.6258, \frac{a_8}{R} = 0.659, \frac{a_9}{R} = 0.6922, \frac{a_{10}}{R} = 0.725.$

Для штампів нескінченної форми також спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із збільшенням часу взаємодії. Процес такої взаємодії показаний на рис. 3.11 та опосередковано це доводить наступний рис. 3.12.

На рис. 3.12 наведено залежності величини області контакту від величини часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.2$  та  $\varepsilon = 0.1$ .

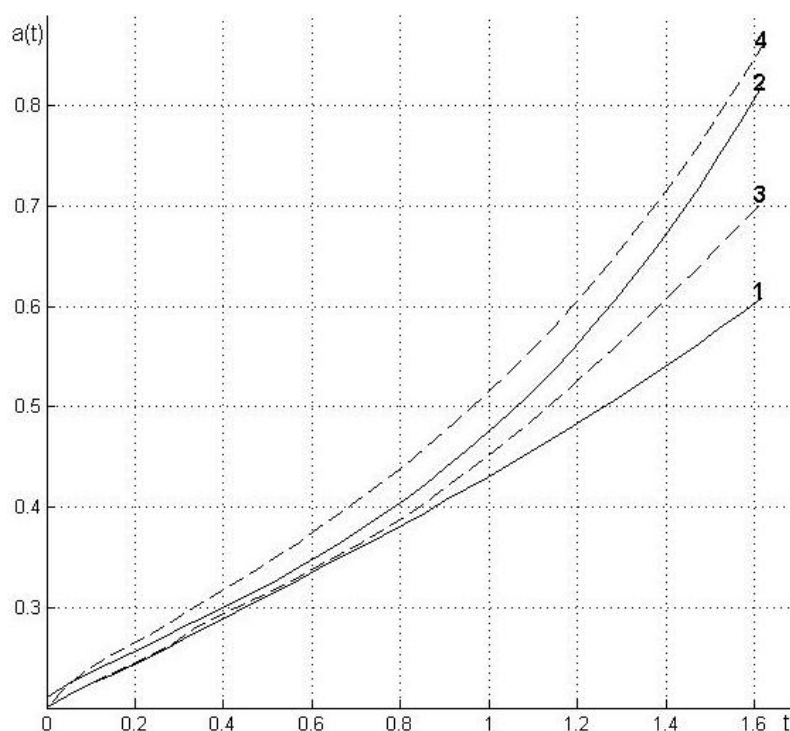


Рис. 3.12

На рис. 3.12: 1 – циліндрична форма, 2 – еліптична форма, 3 – гіперболічна форма, 4 – параболічна форма штампів.

Для всіх штампів при  $t < 0.6$  (час роботи фрикційної пари) розподіли зміни області контакту є близькими, однак при  $t > 0.6$  розподіли зміни області контакту починають значно відрізнятися із збільшенням  $t$ .

На рис.3.13 наведено залежності величини області контакту від величини часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту для штампів еліптичної та гіперболічної при однаковій притискаючій силі  $P=0.0854$  та різних кривизнах штампів.

На рис. 3.13: 1 – еліптична форма при  $\varepsilon=0.1$ , 2 – еліптична форма при  $\varepsilon=-0.2$ , 3 –гіперболічна форма  $\varepsilon=-0.01$ , 4 – гіперболічна форма штампів при  $\varepsilon=0.1$ .

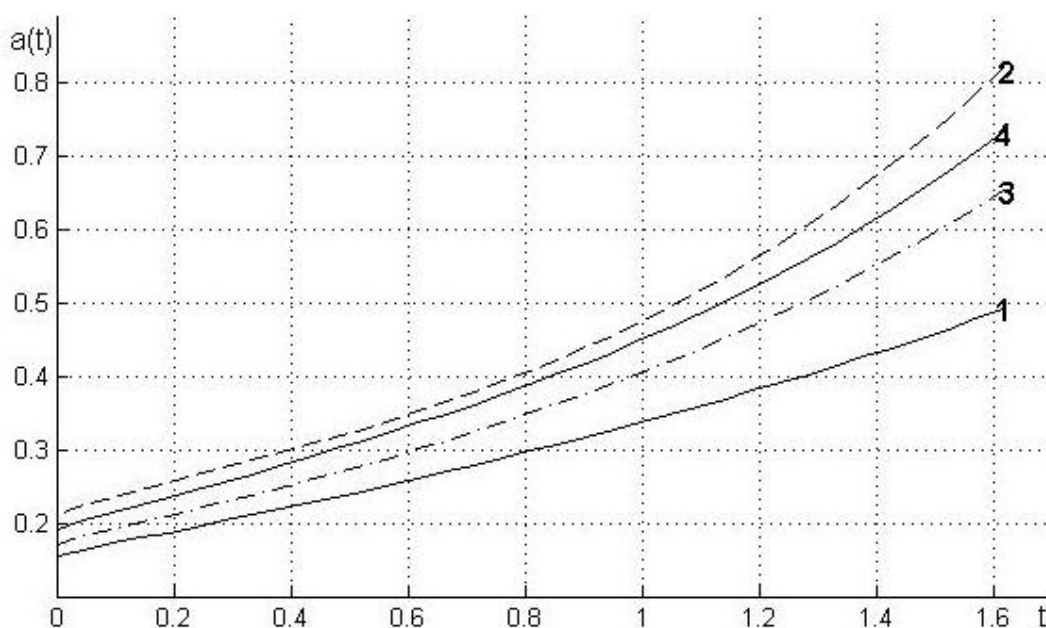


Рис. 3.13

Із рис. 3.13 видно, що для еліптичного та гіперболічного штампів кривизна суттєво впливає на розподіли зміни області контакту в час та процес зношування півплощини в цілому.

### 3.4 Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглянуто задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування

побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактної тиску.

1. Розвинута методика розв'язування інтегро-диференціального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення.

2. Досліджено особливості застосування основних методів для знаходження наближених власних значень і при змінних розмірностях матриць. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації математичних моделей контактних задач зі зношуванням із використанням спеціальних функцій та засобів візуального відображення результатів.

3. Визначено оптимальну кількість власних значень для достовірності числових результатів.

4. Представлений розв'язок узагальненої проблеми на власні значення підходить для всіх форм канонічних штампів (циліндричної, гіперболічної, еліптичної), що є важливим фактором в подальших дослідженнях описаної проблеми, зокрема, при аналізі напружено-деформованого стану в середині півплощини.

5. Розв'язана задача дозволяє визначити контактний тиск в будь-який момент часу і тим самим визначити параметри зношування в кожній точці області контакту.

6. Для представлення результатів побудовано графіки контактних тисків для всіх штампів при різних областях контакту в різні часові моменти.

У результаті числових експериментів встановлено:

- форма штампа при контакті із пружною півплощиною при малих областях контакту  $\frac{a_0}{R} < 0.1$  несуттєво впливає на процес зношування, тому для зменшення складності обчислень всі штампи можна наближено замінити штампом параболічної форми;

- при областях контакту  $\frac{a_0}{R} \in (0.1; 0.3)$  форма штампа значно впливає на процес зношування, однак, якість графіків контактних тисків є однаковою та за

однакові проміжки часу величина зношування є приблизно однакою для кожного штампа;

- для еліптичного та гіперболічного штампів суттєво впливає на область контакту та процес зношування кривизна штампів;
- спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із значним збільшенням часу взаємодії для штампів скінченної форми.



## РОЗДІЛ 4

### КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДЛЯ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ЗНОШУВАННЯ

У розділі досліджено контактну взаємодію жорстких тіл (штампів) канонічної форми з пружною півплощиною захищеною покриттям Вінклера із урахуванням зношування проміжного шару. В умовах плоскої задачі теорії пружності побудовано основне інтегро-диференціальне рівняння задачі для визначення контактного тиску між штампом і покриттям. Розвинуто методику розв'язування інтегро-диференціального рівняння із використанням поліномів Чебишова, яка зводить задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для розв'язування рівняння було запропоновано покроковий алгоритм за часом. Згідно з алгоритмом, час роботи фрикційної пари зі зношуванням розбивається на малі відрізки часу та приймається припущення, що область контакту і контактний тиск є постійними на кожному часовому проміжку. Проведено числові розрахунки контактного тиску для фіксованих областей контакту при змінних параметрах, таких як жорсткість покриття та товщина пружного шару Вінклера. Проаналізовано особливості поведінки контактних напружень для великих та малих областей контакту. Проведено числові розрахунки розподілу контактного тиску в різні часові моменти. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для різних за формою штампів. Чисельно для різних пар матеріалів досліджено час зношування покриття Вінклера для різних штампів при різних початкових областях контакту та різній жорсткості покриття.

Результати розділу опубліковані у працях [122, 127] і доповідались на конференціях [125, 126, 130].

#### 4.1. Математична модель контактної взаємодії для системи жорсткий штамп – тонке покриття (шар Вінклера) – пружна півплощина

Розглянемо плоску задачу про контактну взаємодію системи: жорсткий штамп, пружне тонке покриття, пружна півплощина. У пружну півплощину, яка захищена тонким покриттям, вдавлюється силою  $P$  жорсткий штамп з основою  $f(x)$  (рис. 4.1), а між покриттям та півплощиною виконуються умови ідеального контакту. Штамп рухається з усередненою швидкістю  $V$  в напрямку, перпендикулярному до площини рис. 4.1. У процесі взаємодії між тілами виникає тертя, внаслідок якого відбувається зношування покриття [87, 88].

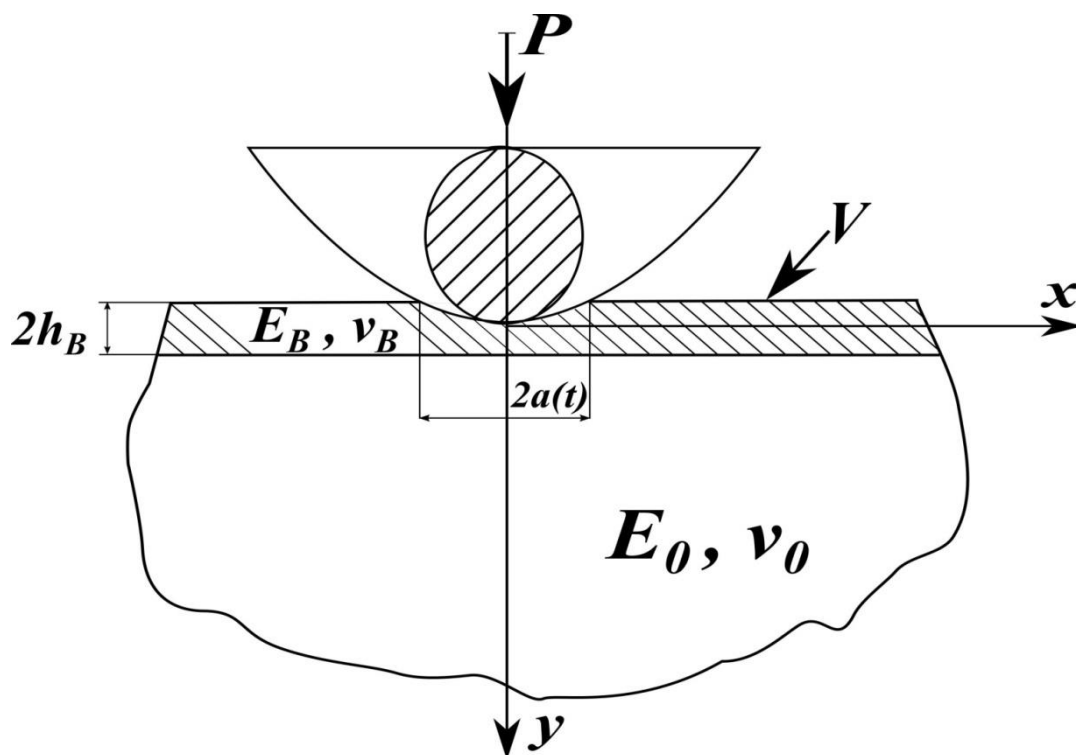


Рис. 4.1

Абразивне зношування моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя, при цьому теплові ефекти не враховуються [37]:

$$\frac{\partial v_*(x,t)}{\partial t} = k_1 k_2 V p(x,t), \quad (4.1)$$

де  $k_1$  – коефіцієнт тертя,  $p(x, t)$  – контактний тиск під штампом,  $k_2$  – коефіцієнт інтенсивності зношування,  $t$  – час зношування,  $v_*(x, t)$  – зміщення за рахунок зношування. Величина  $k_2$  в загальному випадку залежить від властивостей матеріалів, фрикційних параметрів контактної пари, температури та ін. Їх значення для конкретного виду зношування можуть бути знайдені на основі відомих емпіричних і модельних рівнянь зношування [37, 148, 150].

При розв'язуванні контактних задач з покриттям в якості теоретичного узагальнення різних покриттів використовують пружний шар Вінклера [18, 192]. Будемо моделювати тонке пружне покриття шаром Вінклера з одним коефіцієнтом постелі у вигляді неперервно розподілених пружних стрижнів (це закономірно для випадку, коли жорсткість покриття менша або співвимірна жорсткості основного тіла) [26, 53, 88, 197]. Коефіцієнт Вінклера має вигляд:

$$K_B = 2h_B(1 - 2\nu_B)(1 + \nu_B)/(E_B(1 - \nu_B)). \quad (4.2)$$

Інтегральне рівняння (4.1) із урахуванням (4.3) набере вигляду:

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + K_B p'(x, t) + k_1 k_2 V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t), \quad (4.3)$$

де  $\theta = \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2)}$ . Контактний тиск у кожен момент часу  $t$  повинен задовольняти

умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dt, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (4.4)$$

Таким чином задача звелася до сингулярного інтегро-диференціального рівняння (4.3) за умов (4.4).

Варто зауважити що при  $h_B = 0$ , тобто, у випадку, коли товщина шару Вінклера рівна нулю, отримуємо інтегральне рівняння (3.3) для задачі про зношування пружної півплощини розглянуту в попередньому розділі. При  $h_B = 0$  та  $V = 0$  отримаємо плоску контакту задачу, яка є розв'язана у розділі 2.

## 4.2. Метод розв'язування інтегро-диференціального рівняння контактної задачі зі зношуванням покриття

Інтегральне рівняння (4.3) залежить від двох змінних  $x$  та  $t$  і змінної області контакту. Для розв'язування рівняння застосуємо покроковий алгоритм за часом [87, 88] та метод поліномів Чебишова. За цим алгоритмом, розбиваємо час роботи фрикційної пари зі зношуванням на малі відрізки  $\Delta t$ . Припускаємо, що на кожному з часових відрізків контактний тиск і область контакту є постійними (незалежні від часу).

На початковому етапі розв'язування при  $t = 0$  інтегральне рівняння буде мати вигляд:

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi + K_B p_0'(x), |x| \leq a_0. \quad (4.5)$$

Для зручності розв'язування інтегрального рівняння та в подальших обчисленнях введемо безрозмірні величини  $\bar{x} = x/a_0$ ,  $\bar{p}_0 = p_0/\theta$ ,  $\bar{h}_B = (h_B/R)/(a_0/R)$ , (рисочки надалі опускаємо).

Відповідно до введених позначень рівняння (3.5) набуде вигляду:

$$p_0'(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f'(x), \quad (4.6)$$

де  $\lambda = a_0/(\pi\theta K_B)$ ,  $R$  – радіус кривизни в точці  $x=0$  для всіх форм штампів.

Перші дослідження сингулярного рівняння виду (4.6) із використанням теорії потенціалів наведено в роботі [160], нові дослідження методом колокацій наведено в роботах [50, 196].

Для знаходження функції контактного тиску використаємо метод ортогональних поліномів Чебишова першого  $T_n(x)$  та другого  $U_n(x)$  роду.

На покриття зі сталою силою  $P$  діє заокруглений штамп (форми якого вказані у розділі 2), задача є симетрична, а система поліномів Чебишова другого

роду є повною з вагою  $\sqrt{1-x^2}$  на проміжку  $[-1, 1]$ , тому, згідно з вибраним математичним апаратом, розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 U_{2m}(x). \quad (4.7)$$

Взявши похідну у (4.7) в обох частинах рівності та використовуючи властивості поліномів Чебишова [84], отримаємо:

$$p_0'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 (2m+1) T_{2m+1}(x). \quad (4.8)$$

Для подальших міркувань використовуємо формулу спектрального співвідношення для поліномів Чебишова та умову ортогональності поліномів Чебишова першого роду [84, 142]:

$$\int_{-1}^1 \frac{U_{2m}(\xi) \sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi = -\pi T_{2m+1}(x), \quad \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, m \neq k, \\ \pi/2, m = k. \end{cases} \quad (4.9)$$

Підставимо (4.7) та (4.8) в інтегральне рівняння (4.6) отримаємо:

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 (2m+1) T_{2m+1}(x) - \lambda \sum_{m=0}^{\infty} (b_{2m}^0 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2} U_{2m}(\xi)}{\xi-x} d\xi) = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f'(x). \quad (4.10)$$

У отримані розвинення (4.10) підставляємо (4.9) та після математичних спрощень маємо співвідношення:

$$-\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) b_{2m} \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda \pi \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} T_{2m+1}(x) = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f'(x). \quad (4.11)$$

Домножаючи рівність (4.11) на  $T_{2k+1}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  та інтегруючи її по  $x$  від -1 до 1, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $b_{2m}$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k} = -\frac{a_0}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

У матричному вигляді система рівнянь буде мати вигляд:

$$AX = C, \quad (4.13)$$

де  $X = X(b_{20}^0, b_{21}^0, b_{22}^0 \dots)$ .

Матриці  $A$  та  $C$  мають вигляд:

$$A = \begin{cases} a_{mm} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2m+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda} \\ a_{mk} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx. \end{cases},$$

$$C = C(c_0, c_1, \dots, c_i, \dots), c_k = -\frac{a_0}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx. \quad (4.14)$$

Зв'язок між величинами  $P_0$  та  $a_0$  при  $t=0$  будемо шукати із умови рівноваги штамп (4.4):

$$P_0 = \int_{-a_0}^{a_0} p_0(x) dx. \quad (4.15)$$

Варто зауважити, що у (4.15) притискаюча сила  $P_0$  записана в розмірних величинах, надалі для зручності аналізу числових результатів введемо безрозмірну величину  $\bar{P}_0 = P_0 / a_0 \theta$ .

Для розв'язування системи (4.13) було використано бібліотеки лінійної алгебри (Matlab з вбудованим пакетом Lapack та програму Wolfram Mathematica) із системною функцією *mldivide(A,C)*, в якій  $A$  – квадратна матриця (4.14),  $C$  – вектор стовпець (4.14). Для обчислення визначених інтегралів у (4.14) було використано квадратурний метод трапецій, реалізований за допомогою системних бібліотек чисельного інтегрування, із використанням функції *trapz(u,v)*, в якій  $u$  – межі інтегрування,  $v$  – підінтегральна функція [172]. Для обчислення інтегралів з точністю до  $10^{-6}$  було використано метод подвійного перерахунку [58].

Розв'язавши систему (4.13), отримаємо числові коефіцієнти для функції контактного тиску записаного у вигляді (4.7).

На наступному кроці при  $t > 0$ , тобто,  $t \in [0, t_1 = \Delta t]$  для знаходження контактного тиску  $p_1(x)$  інтегральне рівняння (4.3) набуде вигляду:

$$p_1'(x)(1 + \lambda \delta \Delta t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_1(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_1}{R} \lambda \pi f'(x). \quad (4.16)$$

Розв'язок рівняння (4.16) знаходимо аналогічно до значення  $t=0$ , при цьому невідомі коефіцієнти  $b_{2m}^{(1)}$  визначаємо із системи (4.13), провівши заміну  $\lambda$  на  $\lambda_* = \lambda / (1 + \lambda \delta \Delta t)$ , де  $\delta = \pi k_1 k_2 V \theta / a_1$ .

На наступному кроці  $t \in [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$  знаходимо  $p_2(x)$ . Коефіцієнти  $b_{2m}^{(2)}$ , що є основою ряду (4.7), знаходимо із системи (4.13), в якій  $\lambda = \lambda_*$ , а до правої частини потрібно додати доданок накопичення  $\delta \Delta t b_{2m}^{(1)}(2k+1)/2$ . У загальному випадку для знаходження функції контактного тиску  $p_{i+1}(x) = p(x, t_{i+1})$  на проміжку  $t \in [t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$  при  $i \geq 2$  розв'язуємо систему алгебричних рівнянь, що співпадає із системою (4.13), (4.14), в якій до правої частини додаються члени отримані на попередньому кроці:

$$c_k = -\frac{a_i}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx + \frac{2k+1}{2} \delta \Delta t \sum_{n=1}^i b_{2k}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.17)$$

### 4.3. Зношування тонкого покриття пружної півплощини під дією жорстких різних за формою штампів

При побудові графіків контактної тиску та визначення часу зношування враховано зміну області контакту  $a(t)$ . Щоб відобразити на одному графіку контактний тиск у різні моменти часу, було застосовано алгоритм зведення отриманих числових даних до однієї системи координат із урахуванням пропорційності відношення поточної області контакту  $a_i$  в момент часу  $t_i$  до початкової  $a_0$  в момент часу  $t_0 = 0$ .

Забезпечення умови рівноваги здійснюється в наступний спосіб: для  $t_0 = 0$  задаємо значення  $\frac{a_0}{R}$  та знаходимо  $p_0(x)$ , що задовільняє умову рівноваги (4.15).

На наступному кроці при  $t > 0$ ,  $t \in [0, t_1 = \Delta t]$  задаємо значення  $\frac{a_1}{R} > \frac{a_0}{R}$  та знаходимо розв'язок за запропонованою методикою, а за умовою рівноваги на цьому кроці  $\bar{P}_1 = \bar{P}_0$ , де  $\bar{P}_1 = P / \theta a_1$ , коригуємо значення  $\frac{a_1}{R}$  (збільшуємо або зменшуємо). Для наступного проміжку часу  $t \in [t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$  при  $i \geq 2$  використовуємо аналогічну схему описану вище, забезпечуємо  $\bar{P}_i = \bar{P}_0$ .

Числові розрахунки отримано шляхом редукції нескінченної системи алгебричних рівнянь (4.13) та (4.14). Досліджували процес зношування при  $V = 1 \text{ м/с}$ ,  $\Delta t = 100\text{с}$  для таких двох контактних пар БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3$ — $40\%\text{TiO}_2$  та БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Mo-Mo}_2\text{C}$ . Дослідження проводилось при наступних параметрах [148]: для пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3$ —

$$40\%\text{TiO}_2: \frac{E_B}{E_0} = \frac{72 \text{ ГПа}}{78,5 \text{ ГПа}} = 0,92, \quad k_1 = 0,31, \quad k_2 = 2,2 \cdot 10^{-7}, \text{ для пари БрАЖНМц9-4-4-1}$$

$$\text{– Mo-Mo}_2\text{C}: \quad \frac{E_B}{E_0} = \frac{63 \text{ ГПа}}{78,5 \text{ ГПа}} = 0,8, \quad k_1 = 0,31, \quad k_2 = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ та } \nu_0 = 0,34,$$

$$G_0 = 0,42 \cdot 10^5.$$

**4.3.1. Розподіл контактного тиску за механічними характеристиками при  $t=0$ .** Вплив товщини покриття на розподіл контактного тиску показано рис. 4.2. На рис.4.2 наведено графіки контактного тиску для штампа циліндричної форми для області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0,1$ ,  $\frac{E_B}{E_0} = 0,9$ , за різної товщини шару Вінклера

$h_B$  і відповідній притискаючій силі  $P$ .

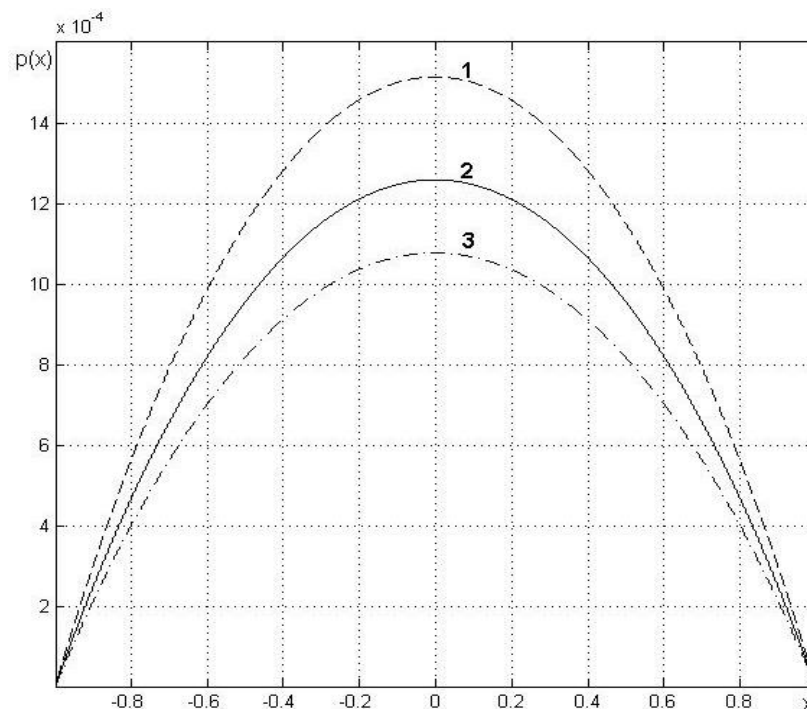


Рис. 4.2



Крива 1 на цьому рисунку відповідає значенню  $h_B = 1$ ,  $P_1 = 0.002$ ; крива 2 –  $h_B = 1.2$ ,  $P_2 = 0.0017$ ; крива 3 –  $h_B = 1.4$ ,  $P_3 = 0.0015$ .

На рис. 4.3 наведено графіки контактної тиску для штампа циліндричної форми для області контакту  $\frac{a}{R} = 0.3$ ,  $\frac{E_B}{E_0} = 0.9$ , за різної товщини шару Вінклера  $h_B$  і відповідній притискаючій силі  $P$ .

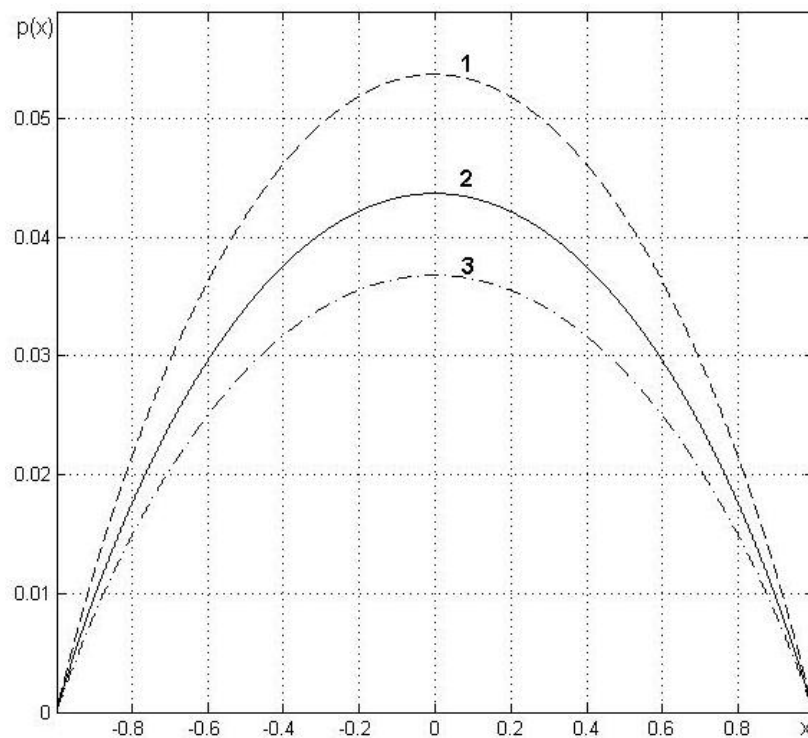


Рис .4.3

Крива 1 на цьому рисунку відповідає значенню  $h_B = 1$ ,  $P_1 = 0.0739$ ; крива 2 –  $h_B = 1.2$ ,  $P_2 = 0.0602$ ; крива 3 –  $h_B = 1.4$ ,  $P_3 = 0.0508$ .

Для штампа параболічної форми було знайдено сили при різній товщині шару Вінклера при однакових співвідношеннях жорсткостей основи та покриття  $\frac{E_B}{E_0} = 0.9$ , області контакту. При  $h_B = 1$  –  $P_1 = 0.058$ ;  $h_B = 1.2$  –  $P_2 = 0.0472$ ;  $h_B = 1.4$  –

$P_3 = 0.0398$ . Із числових даних можна побачити, що при  $\frac{a_0}{R} = 0.3$  (велика область контакту) сили, прикладені до циліндричного, параболічного штампів, значно

відрізняються між собою. А для малих областей контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.1$  числові результати практично співпадають. Аналогічний результат отримано для задачі без покриття (у розділі 2).

Важливим фактором при дослідженні контактних задач такого типу для штампа еліптичної та гіперболічної форм є співвідношення величини півосей:  $a_1, b_1$  – велика та мала півосі еліпса ( $a_1, b_1$  – дійсна і уявна осі гіперболи). Змінюючи ці параметри, можна суттєво впливати на розподіл контактного тиску, дане твердження є справедливим для всіх областей контакту.

На рис. 4.4 наведено графік розподілу контактного тиску для штампа гіперболічної форми при  $\frac{a}{R} = 0.3$ ,  $\frac{E_B}{E_0} = 0.9$ ,  $h_B = 1$  для різних  $\varepsilon$  і відповідній силі  $P$ , прикладеної до штампа.

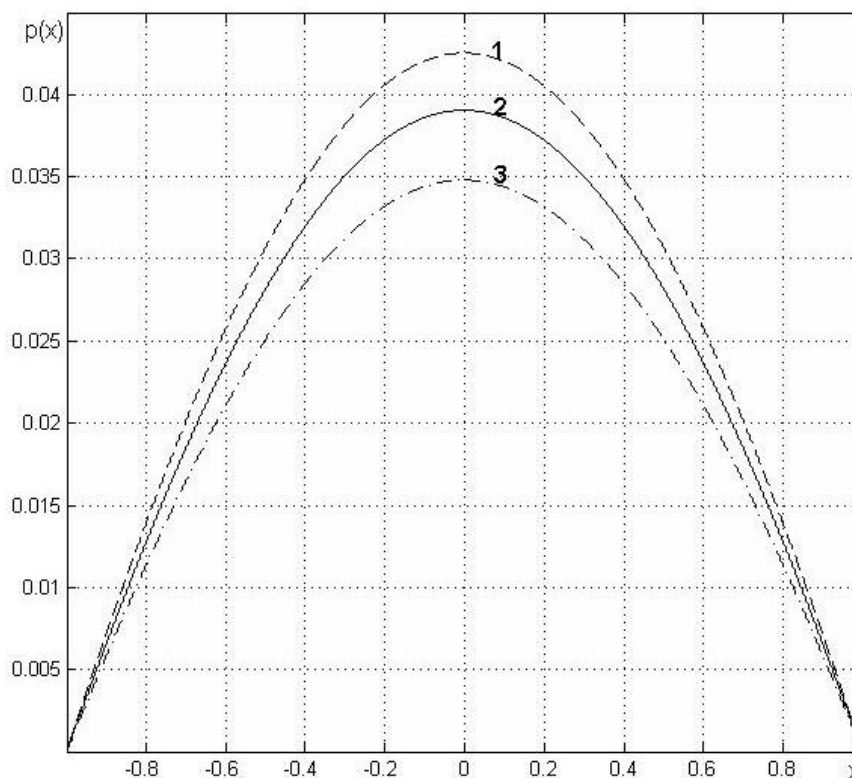


Рис 4.4

Крива 1 на цьому рисунку відповідає значенню  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\bar{P}_1 = 0.0550$ ; крива 2 –  $\varepsilon_2 = 0.01$ ,  $\bar{P}_2 = 0.0505$ ; крива 3 –  $\varepsilon_3 = -0.1$ ,  $\bar{P}_3 = 0.0450$ .

Наведемо числові дані контактної тиску для штампа еліптичної форми при  $\frac{a}{R} = 0.3$ ,  $\frac{E_B}{E} = 1$ ,  $h_B = 1$  для різних  $\varepsilon$  і відповідній силі  $\bar{P}$ , прикладеної до штампа:  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\bar{P}_1 = 0.0813$ ;  $\varepsilon_2 = 0.01$ ,  $\bar{P}_2 = 0.0747$ ;  $\varepsilon_3 = -0.1$ ,  $\bar{P}_3 = 0.0665$ . Із наведених вище числових даних видно, що для еліптичного штампа його кривизна значно більше впливає на величину прикладеної при не значній зміні кривизни, ніж для штампа гіперболічної форми.

**4.3.2. Розподіл контактної тиску за часом та просторовою координатою.** Варто відзначити, що при малих початкових областях контакту  $\frac{a_0}{R} < 0.1$  контактний тиск для всіх штампів практично співпадає з контактним тиском для штампа параболічної форми, опосередковано це також показують рис. 4.5 та рис. 4.6.

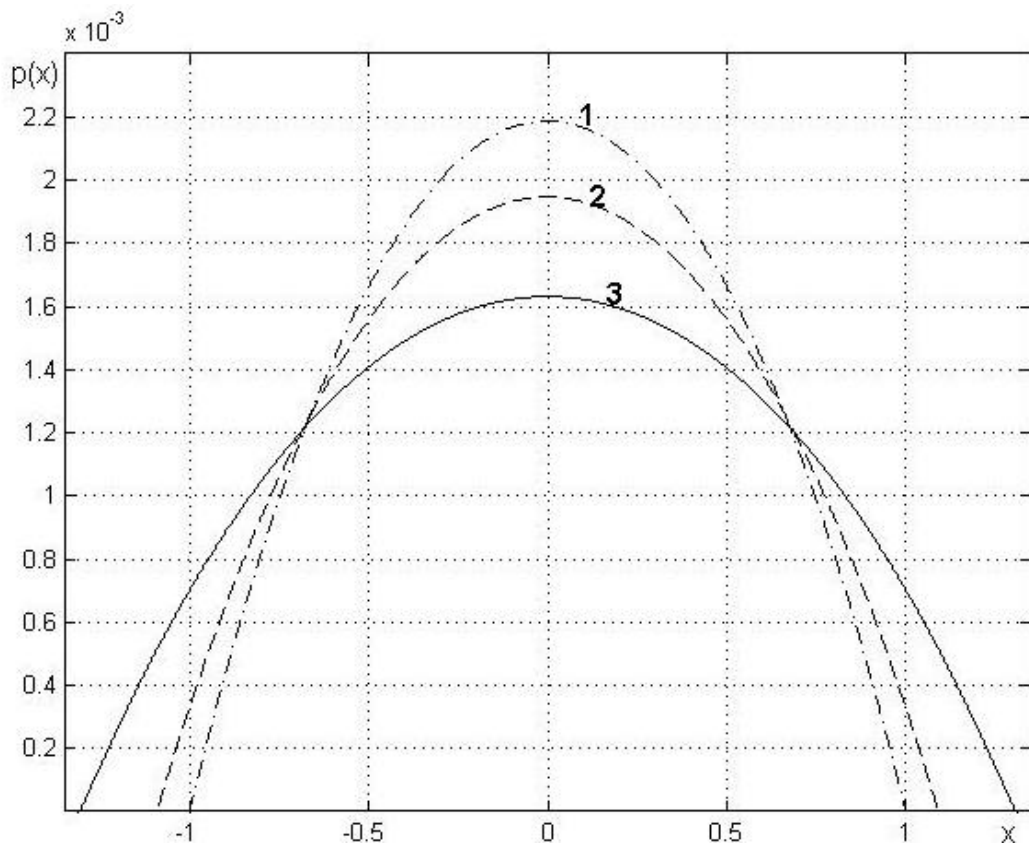


Рис 4.5

На рис. 4.5 наведено контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -40% $\text{TiO}_2$  і штамп є циліндричної форми при заданій силі  $\bar{P}=0.0029, h_B=1$  та  $t_0=0, t_1=100c, t_2=200c$  було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_0}{R}=0.1118, \frac{a_1}{R}=0.122, \frac{a_2}{R}=0.16$ .

Крива 1 на цьому рисунку та наступних відповідає часу  $t_0$ , крива 2 -  $t_1$ , крива 3 -  $t_2$ .

Для гіперболічного штампа (пара БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -40% $\text{TiO}_2$ ) при  $\bar{P}=0.0029, \varepsilon=0.1$  і при заданих вище маємо параметрах, маємо:  $\frac{a_0}{R}=0.1125,$

$\frac{a_1}{R}=0.1281, \frac{a_2}{R}=0.175$ . Для цього ж штампа і пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Mo-Mo}_2\text{C}$

при  $\bar{P}=0.0024$ , маємо  $\frac{a_0}{R}=0.1125, \frac{a_1}{R}=0.1287, \frac{a_2}{R}=0.195$  контактний тиск, показаний на рис. 4.6.

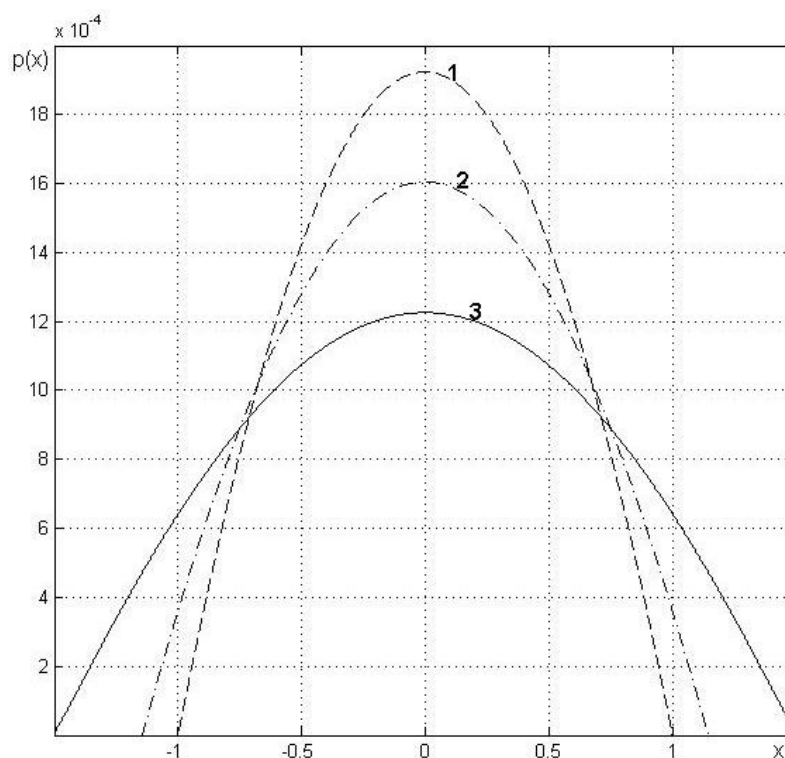


Рис. 4.6

Запропонований спосіб дає можливість для різних пар матеріалів із використанням розбиття по часу порахувати величину зношування покриття в довільний момент часу і будь якій області контакту, із використанням знайдених різних областей зношування, контактний тиск для яких показаний на рис. 4.5 – рис. 4.8.

Суттєвою складністю при моделюванні таких процесів є пошук та підбір фізико-механічних параметрів покриття та основи, які б задовольняли умови задачі та використовувались на практиці.

Наприклад, (рис. 4.7) побудовано контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-}40\%\text{TiO}_2$  і штамп є циліндричної форми, при заданій силі  $\bar{P}_0 = 0.0191$ ,  $h_B = 1$  та  $t_0, t_1, t_2$ , описаних вище, було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.2009$ ,  $\frac{a_1}{R} = 0.238$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.3312$ .

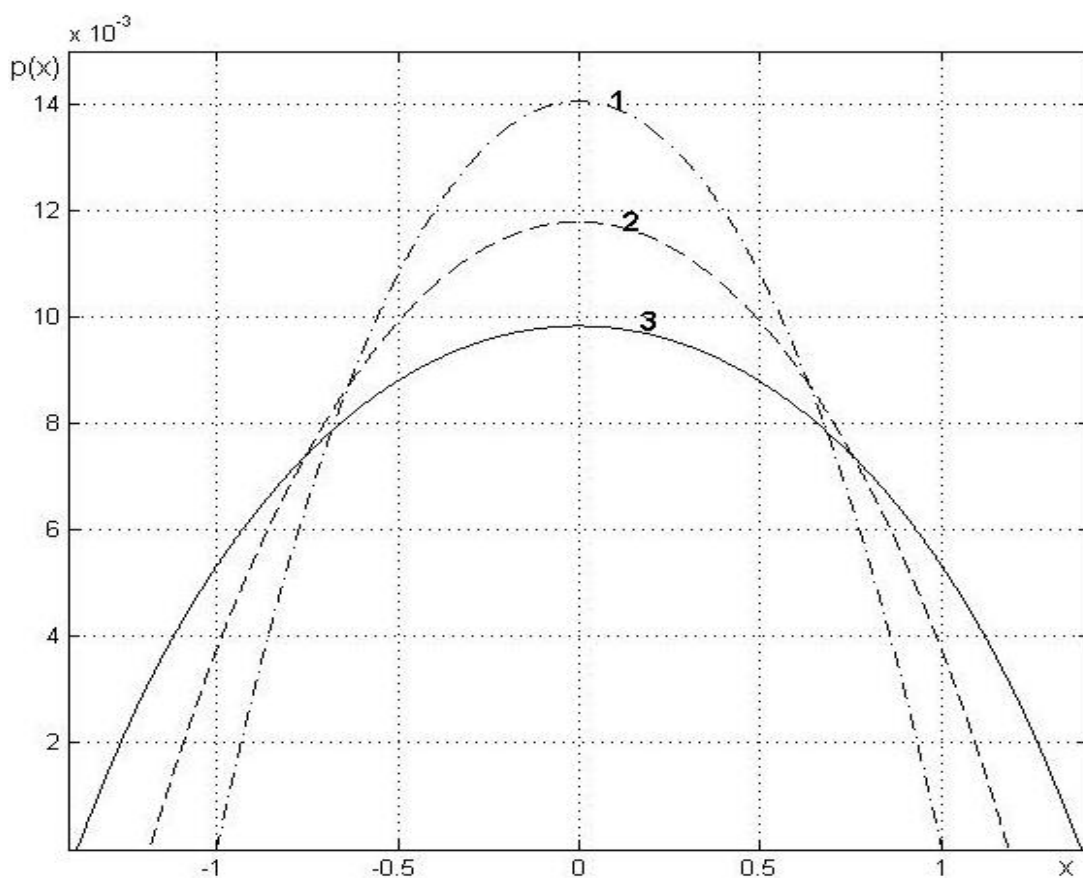


Рис 4.7

Для пари БрАЖНМЦ9-4-4-1 – Мо-Мо<sub>2</sub>С і циліндричного штампа при силі  $\bar{P} = 0.0167$  та  $t_0, t_1, t_2$ , маємо  $\frac{a_0}{R} = 0.2009$ ,  $\frac{a_1}{R} = 0.2505$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.373$ .

Чисельно встановлено, що основним параметром, котрий впливає на процес зношування, є коефіцієнт пропорційності (інтенсивність зношування), який є різним для багатьох пар матеріалів, опосередковано це доводиться і відмінними областями зношування та розподілами контактного тиску наведеними на рис. 4.7 та рис. 4.8.

На рис. 4.8 побудовано контактний тиск для пари БрАЖНМЦ9-4-4-1 – Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-40%TiO<sub>2</sub> і штамп є параболічної форми при заданій силі  $\bar{P}_0 = 0.0191$ ,  $h_B = 1$  та  $t_0, t_1, t_2$ , заданих вище, було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.21$ ,  $\frac{a_1}{R} = 0.258$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.4$ .

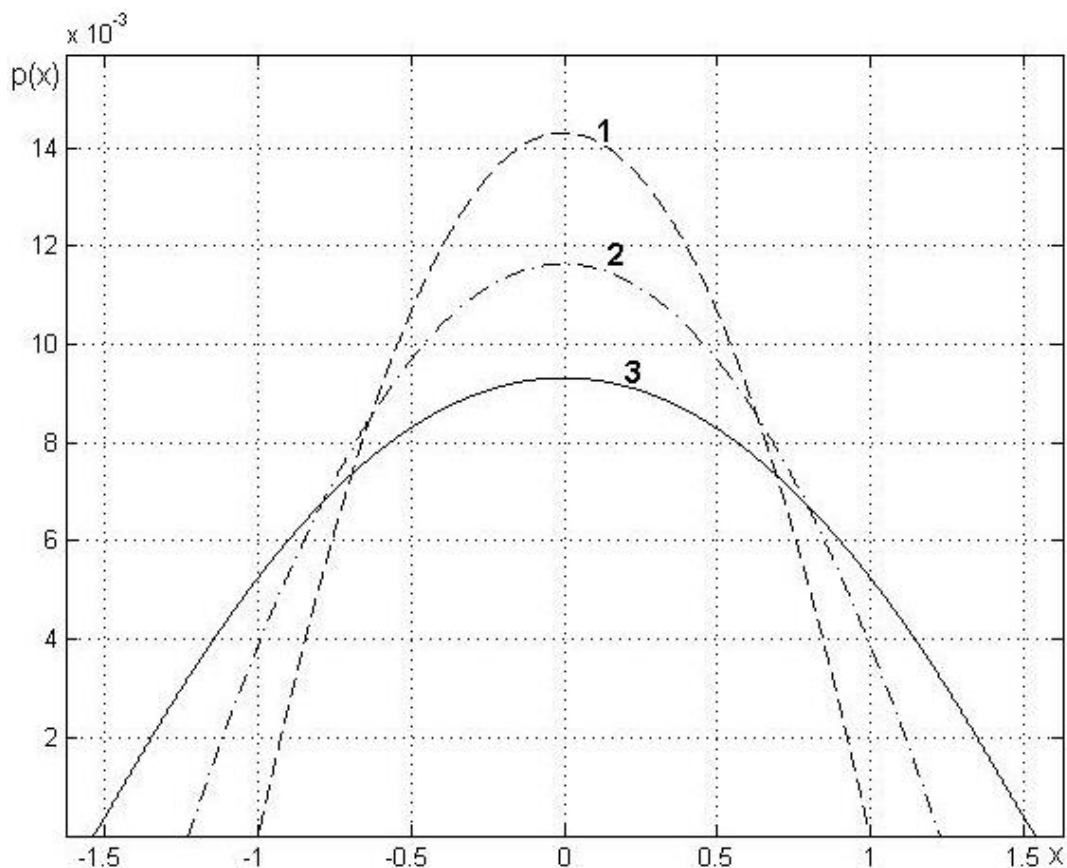


Рис. 4.8

Для пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-}40\%\text{TiO}_2$  і штамп є еліптичної форми при заданій силі  $\bar{P}_0 = 0.0191$ ,  $h_b = 1$  та  $t_0, t_1, t_2$  було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.195$ ,  $\frac{a_1}{R} = 0.230$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.3312$ .

Варто відмітити, що при однаковій притискаючій силі процес зношування (області зношування) значно відрізняється для скінченних штампів (циліндричний, еліптичний) та нескінченних (гіперболічний, параболічний) штампів.

Також було проведено чисельні розрахунки для побудови контактного тиску при  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 75\text{с}$ ,  $t_2 = 150\text{с}$  для різних штампів з метою перевірки впливу розбиття по часу на стійкість запропонованого алгоритму.

В якості прикладу на рис. 4.9 наведено графік контактний тиску для пари БрАЖНМц9-4-4-1 –  $\text{Mo-Mo}_2\text{Si}$  параболічного штампа при  $\bar{P} = 0.0059$ ,  $h_b = 1$  та  $t_0, t_1, t_2$ , заданих вище, було знайдено відповідні області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.15$ ,

$$\frac{a_1}{R} = 0.177, \frac{a_2}{R} = 0.265.$$

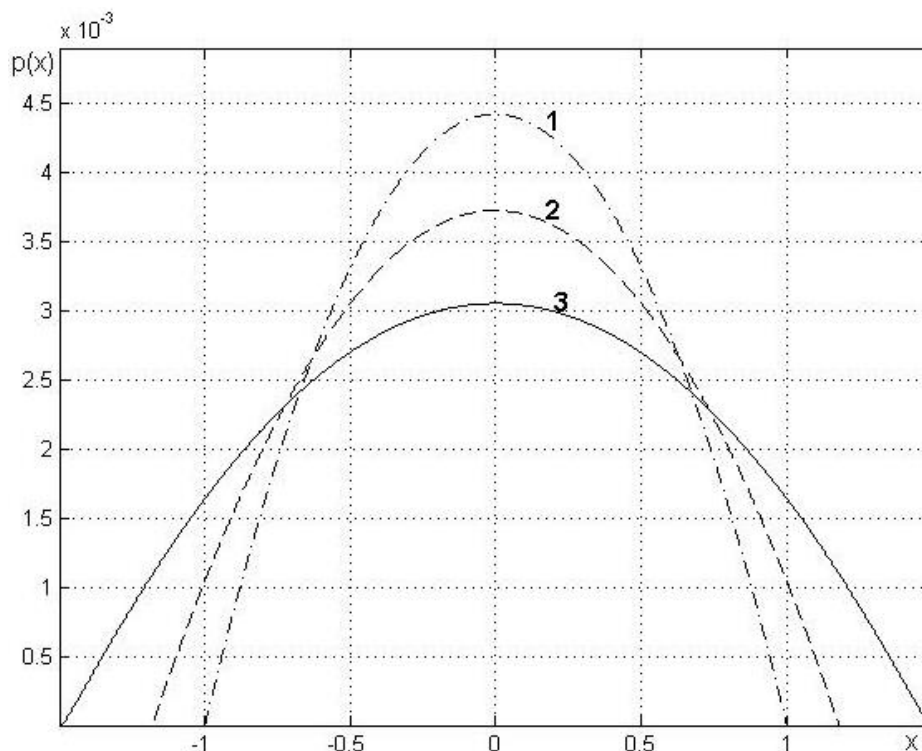


Рис. 4.9

Для штампа циліндричної форми при однаковій початковій області контакту та матеріалів розрахунки контактної тиску є наступні:

$$\bar{P} = 0.0064 \frac{a_0}{R} = 0.15, \frac{a_1}{R} = 0.17, \frac{a_2}{R} = 0.24.$$

Варто відмітити, що вибір кроку розбиття часу на частини є ключовим фактором з точки зору обчислювальної складності, зокрема, пошуку проміжних областей зношування і забезпечення для них умови рівноваги (4.12) у кожному моменті часу. Однак, за цим методом можна розрахувати час ефективної роботи фрикційної пари, за який механізм не вийде з ладу і забезпечується безперебійна робота.

#### 4.4 Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглянуто задачу про контактну взаємодію жорстких штампів різної форми (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна) із пружною півплощиною, яка захищена тонким пружним шаром Вінклера для визначення контактної тиску між штампом та покриттям.

1. Побудовано математичну модель задачі та на основі отриманої моделі розвинуто метод розв'язку із використанням поліномів Чебишова.
2. Для запропонованого методу розвинуто покроковий алгоритм пошуку розв'язку інтегро-диференціального рівняння для контактної тиску, що зводить задачу до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь.
3. Представлений розв'язок підходить для всіх форм канонічних штампів (циліндричної, гіперболічної, еліптичної), що є важливим фактором в подальших дослідженнях описаної проблеми, зокрема, при аналізі контактної тиску між покриттям та півплощиною, визначенню напружено-деформівного стану в середині пружної півплощини.
4. Здійснено програмну реалізацію запропонованої методики в системі Matlab R2013a із можливістю зміни кількості алгебричних рівнянь, тобто



кількості членів ряду для контактного тиску для досягнення точності отриманих результатів.

5. Розв'язана задача дозволяє визначити контактний тиск в будь якій точці області контакту і тим самим оцінити параметри зношування в кожній точці області контакту.

6. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для різних за формою штампів та різних контактних пар, що мають різні співвідношення пружності, інтенсивності зношування і отримані результати співпадають з окремими даними наведеними у науковій літературі.

У результаті числових експериментів встановлено:

- співвідношення жорсткості півплощини та покриття, товщини шару значно впливають на розподіл контактного тиску та величину його максимуму;

- форма штампа при контакті із покриттям при малих областях контакту  $\frac{a_0}{R} < 0.1$  несуттєво впливає на процес зношування, однак, зі збільшенням часу роботи фрикційної пари проявляється різниця у величині області зношування для скінченних та нескінченних штампів;

- при областях контакту  $\frac{a_0}{R} \in (0.1; 0.3)$  форма штампа впливає на процес зношування, зокрема, різна кривизна штампів;

- при зношуванні покриття чисельно встановлено, що для забезпечення достовірності результатів, жорсткість покриття має бути меншою жорсткості півплощини  $\frac{E_B}{E_0} < 1$  і для більшості експериментальних досліджень їх

співвідношення знаходиться в діапазоні  $\frac{E_B}{E_0} \in (0.7; 0.95)$ .

- встановлено, що основним параметром, котрий впливає на процес зношування, є коефіцієнт пропорційності (інтенсивність зношування), який є різним для багатьох пар матеріалів.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання, що полягає у розвиненні методик дослідження задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми із пружною півплощиною та визначенню напружено-деформованого стану в півплощині, задач про контактну взаємодію цих штампів з півплощиною із урахуванням зношування матеріалу, у тому числі із пружною півплощиною, яка захищена тонким пружним шаром Вінклера.

Отримано такі основні наукові результати:

1. Проведено дослідження плоских задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною та проведено аналіз особливостей розподілу контактного тиску і напружень у півплощині.

2. Розроблено схеми обчислення повних еліптичних інтегралів третього роду, через які визначається контактний тиск у всьому діапазоні вхідних параметрів задачі, а також запрограмовані алгоритми розрахунків напружень та меж текучості у півплощині в залежності від форми штампа та величини навантаження контактної пари.

3. Для контактної задачі зі зношуванням на основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблена методика розв'язування для цього рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення.

4. Досліджено особливості застосування основних методів для знаходження наближених власних значень. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації математичних моделей контактних задач зі зношуванням, визначено оптимальну кількість власних значень для різних канонічних форм штампа.

5. Для системи: жорсткий штамп – тонке покриття (шар Вінклера) – пружна півплощина, побудовано математичну модель задачі та розвинуто метод

розв'язку із використанням поліномів Чебишова. Розвинуто покроковий алгоритм пошуку розв'язку сингулярного інтегро-диференціального рівняння зі змінними межами інтегрування, що зводить задачу до розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.

6. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття штампами канонічної форми для контактних пар з різними фізико-механічними властивостями.

У результаті числових експериментів встановлено:

- у всіх розглянутих задачах форма штампа при контакті із пружною півплощиною при малих областях контакту  $\frac{a_0}{R} < 0.1$  несуттєво впливає на розподіл контактного тиску;

- при областях контакту (у задачах зі зношуванням)  $\frac{a_0}{R} \in (0.1; 0.3)$  форма штампа суттєво впливає процес взаємодії та числові розрахунки;

- для всіх форм штампів зберігається тенденція збільшення відстані від поверхні до точки максимуму максимального дотичного напруження в залежності від величини навантаження контактної пари;

- на величину межі текучості впливає: величина області контакту, форма штампа, співвідношення модулів пружності контактної пари та границя текучості матеріалу основи;

- при зношуванні півплощини штампами (циліндричної, еліптичної) скінченної форми спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із значним збільшенням часу взаємодії;

- при зношуванні покриття встановлено, що для забезпечення стійкості обчислювальних схем та достовірності результатів жорсткість покриття має бути меншою жорсткості півплощини  $\frac{E_B}{E_0} < 1$ ;

- встановлено, що основним параметром, котрий суттєво впливає на процес зношування тонкого покриття є коефіцієнт інтенсивності зношування.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Аналитические решения осесимметричных контактных задач для слоя. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2011. № 4. С. 1948–1949.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов / под ред. А.В. Александрова. Москва: Высшая школа, 2003. 560 с.
3. Александров В. М., Ворович И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. *Прикладная математика и механика*. 1960. Т. 24, № 2. С. 323–334.
4. Александров В.М. О действии эллиптического штампа на упругое полупространство. *Сборник авторефератов научно-исследовательских работ за 1959г.* Ростов-на-Дону: Изд-во ун-та, 1960. С. 45–47.
5. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 304 с.
6. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007. 114 с.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва: Наука, 1983. 488 с.
8. Амирджян А.А., Саакян А.В. О вдавливании п-образного жёсткого штампа в упругую полуплоскость с учетом сил трения скольжения и сцепления. *Известия национальной академии наук Армении*. 2013. №3. С. 3–11.
9. Аулін В.В., Бобрицький В.М. Комп'ютерне моделювання полів температур та напружень в композиційних матеріалах та покриттях при їх формуванні, терті та зношуванні. *Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація*. Кіровоград, 2014. Вип. 27. С.236–245.
10. Ахиазев Н.И. Элементы теории эллиптических функций. Москва: Наука, 1970. 298 с.

11. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: эллиптические и автоморфные функции, функции Ляме и Матье. Москва: Наука, 1967. 304 с.
12. Белых В.Н. Алгоритмы вычисления полных эллиптических интегралов и некоторых связанных с ними функций. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2012. № 2. С. 21-32.
13. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
14. Береснев В.М. Влияние многокомпонентных и многослойных покрытий на процессы трения и износа. *Фізична інженерія поверхні*. 2004. №2. С. 214-219.
15. Бобылёв А. А., Белашова И.С., Кузьмин С.Д. Контактная задача о вдавливании в функционально-градиентное покрытие выпуклого штампа заданным усилием. *Прикладная математика, механика, физика*. 2014. №3. С.151–160.
16. Богомолов В.А., Склепус С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния, ползучести и повреждаемости многослойных плит на упругом основании. *Проблемы машиностроения*. 2014. Т.17, №1. С. 27–33.
17. Болотов А.Н., Сутягин О.В., Васильев М.В. Исследование упругопластических контактных деформаций металлов применительно к процессам фрикционного взаимодействия. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2011. №4. С. 977–981.
18. Бусяк Ю.М., Ткачук А.В., Дёмина Н.А., Скрипченко Н.Б., Мазур И.В. Проблема обеспечения защищенности корпусов легкобронированных машин: постановки и подходы к решению. *Проблемы машиностроения*. 2015. №1. С. 40–45.
19. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я., Реут А.В. Осесимметричная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 1. С. 185–196.
20. Вайсфельд Н.Д. Соударение конечного упругого цилиндра с жесткой преградой. *Прикладная механика*. 2007. № 9. С. 58–69.
21. Вайсфельд Н.Д. Удар кругового полого конечного цилиндра о неподвижную преграду. *Теоретическая и прикладная механика*. 2003. № 37. С. 162–167.

22. Вайсфельд Н.Д., Реут А.В. Осесимметричная задача теории упругости для кругового конуса с острием при учете его собственного веса. *Вестник Одесского университета*. Т.17, № 3 2012. С. 99–107.
23. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. Изд. 2-е, стереот. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 160 с.
24. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва: Физматлит, 2007. 224 с.
25. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). Москва: Высшая школа, 2000. 266 с.
26. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Москва: Физматгиз, 1960. 491 с.
27. Волков С.С. Аналитическое решение контактной задачи о внедрении сферического индентора в мягкий упругий слой. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2012. № 7. С. 5–10.
28. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. Москва: Наука, 1974. 456 с.
29. Воронцов Ю. О., Икрамов Х. Д. Численный алгоритм для решения матричного уравнения  $AX + X^T B = C$ . *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. №5. С. 739–747.
30. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980. 304 с.
31. Галин Л.А. О давлении штампа эллиптической формы в плане на упругое полупространство. *Прикладная математика и механика*. 1947. № 2. С. 281–284.
32. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд. 3-е. Москва: Наука, 1977. 639 с.
33. Голуб Д., Ч. Ван Лоун Матричные вычисления / пер. с англ. под ред. Воеводина В.В. Москва: Мир, 1999. 548 с.
34. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. 320 с.

35. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
36. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании. *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76, №. 5. С. 695–709.
37. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
38. Грабко О.В. Ітераційні процеси для розв'язання статичної задачі про контакт пружних шорстких тіл. *Труди Інститута прикладної математики і механіки*. 2013. Т.27. С. 104–112.
39. Градиський Ю.О., Карпусенко О.В. Вплив методу зміцнення на процеси тертя і зношування. *Вісник Харківського національного технічного університету імені Петра Василенка*. 2014. № 160. С. 122–128.
40. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
41. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий: Печать ЧП Мельник А.А., 2004. 622 с.
42. Демидов С.П. Теория упругости. Москва: Высшая школа, 1979. 432 с.
43. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
44. Довнорович В.И. Пространственная контактная задача об эллиптическом штампе с поверхностью основания, изображаемой любым полиномом. *Инженерно-физический журнал*. 1960. Т. 3, № 2. С. 117–123.
45. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.
46. Дьяченко Н.Н., Шашкова Е.В. Контакт параболического штампа с упругим шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2010. № 2. С. 29–37.

47. Жук Я.О., Сенченков І.К., Васильєва Л.Я. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевого диска. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54, №1. С. 101–115.
48. Закалов О.В., І.О. Закалов Основи тертя і зношування в машинах: навч. посіб. Терноп. нац. тех. ун-т ім. І.Пулюя. Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. І.Пулюя. 2011. 322 с.
49. Золочевский А.А., Склепус А.Н., Склепус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. Харків: Гарант, 2011. 715 с.
50. Калякин А.А. О взаимодействии штампа со слоистым упругим основанием. *Прикладная механика и техническая физика*. 2006.Т. 47, № 3. С. 165–175.
51. Канатников А.Н., Зарубина В.С., Крищенко А.П. Линейная алгебра: учеб. для вузов. Изд. 3-е, стереотип. /Моск. гос. тех. ун-т им. Н.Э. Баумана. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 336 с.
52. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
53. Киселев В.А. Расчет пластин. Москва: Стройиздат, 1973. 151 с.
54. Кит Г.С., Максимук А.В. Метод интегральных уравнений Вольтерра в контактных задачах для тонкостенных элементов конструкций. *Теоретическая и прикладная механика*. Донецк 1997. Вып. 27. С. 96–103.
55. Кіндрачук М.В., Тісов О.В., Стебелецька Н.М. Розробка градієнтних покриттів для накладок гальмівних пристроїв. *Технологический аудит и резервы производства*. 2014. №3. С.7–16.
56. Кіт Г.С., Мартиняк Р.М., Криштафович А.А., Мачишин І.М. Вплив сил тертя на параметри термічного і дифузійного контакту пружних тіл з регулярним рельєфом. *Машинознавство*. 2000. № 3. С. 3-8.
57. Кіт Г.С., Монастирський Б.Є. Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 1998.Т. 41, № 4. С. 7–11.
58. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах Москва: Наука, 1972. 367 с.



59. Корн Г., Т. Корн Справочник по высшей математике для инженеров. Москва: Наука, 1974. 832 с.
60. Косолап А.И., Перетяцько А.С. Сопряженные направления в задачах на собственные значения симметричных матриц. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2013. №21. С. 114–122.
61. Коцюба А.Ю., Лавренчук С.В. Комп'ютерне моделювання контактної взаємодії жорсткого штампа складної форми та півплощини з урахуванням сил тертя. *Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ"*. 2010. № 27. С. 151–159.
62. Коцюба А.Ю., Лавренчук С.В. Контактна взаємодія жорсткого штампа та нескінченної ортотропної пластинки з близьким до еліптичного отвором. *Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ"*. 2011. № 33. С. 80–83.
63. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. Москва: Машиностроение, 1977. 526 с.
64. Крагельский И.В. Трение и износ. Москва: Машгиз, 1962. 384 с.
65. Кречетов А.А. Развитие метода конечных элементов для решения контактной задачи взаимодействия инструмента и обрабатываемой детали. *Обработка металлов*. 2014. №3. С.82–89.
66. Кубенко В.Д. Волновые процессы в упругой полуплоскости при ударе затупленным твердым телом. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 2. С. 118–129.
67. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В., Жук Я.О. Нестационарная плоская контактная задача теории упругости для согласованных цилиндрических поверхностей. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2009. №10. С. 162–178.
68. Кубенко В.Д., Гавриленко О.В. Плоска симетрична задача про удар твердого циліндричного тіла по поверхні каверни при суперкавітаційному обтіканні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50, № 1. С. 82–90.

69. Кубенко В.Д., Марченко Т.А. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя. *Прикладная механика*. 2008. Т. 44, № 3. С. 55–65.
70. Кубенко В.Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды. *Прикладная механика*. 2004. Т. 40, № 11. С. 3–44.
71. Кузьменко А.Г. Развитие методов контактной трибомеханики. *Проблеми трибології*. 2011. №1. С. 117–135.
72. Кузьменко А.Г. Развитие методов трибомеханики. Хмельницкий: ХНУ, 2010. 270 с.
73. Кузьменко В.І., Хитрова Т.В. Про обернені задачі механіки деформівного тіла. *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. 2011. Т. 2, № 15. С. 140–146.
74. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций.: учеб. пособ. / Моск. физ.-тех. ин-т. Москва: МФТИ, 2008. 215 с.
75. Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сплошных сред учеб. пособ. / Моск. физ.-тех. ин-т. Москва: МФТИ, 2006. 158 с.
76. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 720 с.
77. Кушнір Р.М., Попович В.С., Гарматій Г.Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2001. Т. 37, № 6. С. 39–44.
78. Кушнір Р.М., Дмитрах І.М. Теорія і методи розрахунку напруженого стану та міцності твердих деформівних тіл з концентраторами напружень. *Вісник НАН України*. 2013. № 1. С. 59–70.
79. Леонов М.Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала. *Український математичний журнал*. 1953. № 1. С.50–58.
80. Литвинов В.Н., Михин Н.М., Мышкин Н.К. Физико-химическая механика избирательного переноса при трении. Москва: Наука, 1979. 185 с.

81. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. Москва: Янус, 1995. 519 с.
82. Лукашевич А.А. Расчетные модели контактного взаимодействия и разрушения деформируемых тел с применением контактных конечных элементов. *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета*. 2013. №2. С. 221–225.
83. Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Нука, 1970. 939 с.
84. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Москва: Мир, 1980. 608 с.
85. Максимович В.М., Коцюба А.Ю., Лавренчук С.В. Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми: монографія. Луцьк : РВВ ЛНТУ, 2012. 97 с.
86. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: матеріали міжнар. наук. конф. (Львів, 21–25 травня 2013 р.). Львів, 2013. С. 72–73.
87. Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям / О.В. Максимук // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2000. – Вип. 57. – С. 88-92.
88. Максимук О.В., Махніцький Р.М., Щербина Н.М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій: монографія. Львів: Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2005. 396 с.
89. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: наукові праці ІХ міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів, 2014. С. 281–283.

90. Максимук О.В. Розрахунок напружень у півплощині під дією штампів різної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2000. Т. 42, №2. С. 155–162.
91. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Методы решения интегральных уравнений: справочник. Москва: Факториал, 1999. 272 с.
92. Мартиняк Р. М., Прокопишин І.А., Прокопишин І.І. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 3. С. 43–56.
93. Мартиняк Р.М., Швець Р.М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 1997. Т. 40, № 2. С. 107–109.
94. Мартиняк Р.М., Слободян Б.С. Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2009. Т. 45, № 1. С. 62–66.
95. Марукович Е.И., Карпенко М.И. Литейные сплавы и технологии. Минск: Беларус. навука, 2012. 442 с.
96. Машков Ю. К. Трибофизика металлов и полимеров: монография. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. 240 с.
97. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Физико-математическая библиотека инженера. Москва-Ленинград: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. 304 с.
98. Можаровский В.В., Марьина Н.А. Математическое моделирование наноконтактного взаимодействия ортотропных тел. *Проблемы физики, математики и техники*. 2010. № 2. С. 47–53.
99. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підруч. для вузів. / Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ: Вища школа, 2002. 308 с.
100. Морозов Е.М., Зернин М.В. Контактные задачи механики разрушения. Москва: Машиностроение, 1999. 544 с.
101. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

102. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Москва: Наука, 1968. 513 с.
103. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.
104. Нахайчук О.В. Оценка деформируемости при внедрении плоского штампа в металл с использованием МКЭ. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2008. №3. С. 58-61.
105. Нахайчук О.В., Мізрах А.А., Пухтіцька Н.О., Музичук В.І. Дослідження впливу тертя на напружений стан при вдавлюванні заокругленого індентора. *Проблеми трибології*. 2015. №4. С. 11–16.
106. Острик В.И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77, № 4. С. 605–619.
107. Острик В.І. Контактна механіка: підруч. / Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2015. 560 с.
108. Панчук О.І., Габрусєва Г.В., Шелестовський Б. Г. Контактна задача для штампа складної конфігурації та попередньо напруженого півпростору. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2015. № 1. С. 35–45.
109. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / пер. с англ. Москва: Мир, 1983. 384 с.
110. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988. 280 с.
111. Пістунов І.М. Вузли тертя ковзання. Моделі та оптимізація: монографія. Дніпропетровськ: НГУ, 2009. 177 с.
112. Подскребко М.Д. Сопротивлени материалов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести и механики разрушения: учеб. пособие. / Белорус. нац. тех. ун-ет. Минск: Вышэйшая школа, 2009. 669 с.

113. Полтавченко С.В. Моделювання зносостійких деталей з покриттям. *Труды Одесского политехнического университета*. 2006. №1. С. 32–36.
114. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетресений. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
115. Приварников А.К., Столярчук І. А. Особливості чисельної реалізації методу розв’язання першої граничної періодичної задачі плоскої теорії пружності для багат шарових основ. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2010. № 2. С. 113–119.
116. Прудников А.П., Брынков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы: в 3 т. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т.3. 688 с.
117. Рвачёв В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
118. Розенблат Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. Москва: URSS, 2010. 204 с.
119. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
120. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Аналіз напружено-деформівного стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, №4. С. 162–167.  
Те саме: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. 220, No. 2. P. 204–212.
121. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. №20. С. 180–187.
122. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58, №4. С. 136–140

123. Сачук Ю.В. Еліптичні інтеграли в задачах математичного моделювання контактної взаємодії тіл. *Математика. Інформаційні технології. Освіта: тези доповідей III міжнар. наук.-практ. конф.*( Луцьк-Світязь, 6–8 червня 2014 р. ). Луцьк-Світязь, 2014. С. 27–28.
124. Сачук Ю.В. Застосування еліптичних інтегралів у задачі контактної взаємодії жорстких штампів різної форми із пружною півплощиною. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали VIII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів* (Луцьк, 14-15 травня 2014 р.). Луцьк, 2014. С. 340-342.
125. Сачук Ю.В. Зношування пружної півплощини, захищеної шаром Вінклера штампами канонічної форми. *Сучасні проблеми термомеханіки: зб. наук. праць міжнар. наук. конф.* (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів, 2016. С. 277–279. URL: <http://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016>
126. Сачук Ю.В. Контактна взаємодія тіл з покриттями із штампами канонічної форми з урахуванням зношування матеріалу. *Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини: тези доповідей міжнар. наук.-практ. конф.* (Миколаїв, 17–19 вересня 2015 р.). Миколаїв, 2015. С. 74–75.
127. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №22. С. 117–124.
128. Сачук Ю.В. Контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми із пружним ізотропним півпростором / Ю.В. Сачук // VII Міжнар. наук.-практ. конференція студентів і аспірантів “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень”: матер. конф. (Луцьк, 13-14 травня 2013 р.). – Луцьк, 2013. – С. 192-194.
129. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2015. №2. С. 70–80.

130. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів із пружною півплощиною з покриттям. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015: матеріали відкр. наук.-тех. конф. молодих науковців і спеціалістів (Львів, 20–22 жовтня 2015р.)*. Львів, 2015. С. 71–72.
131. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружним півпростором зі зношуванням матеріалу. *Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тези доповідей X межд. науч. конф. для молодых учёных (Харків, 24–25 квітня 2015 р.)*. Харків, 2015. С. 45–46.
132. Сачук Ю.В. Математичні моделі із використанням узагальненої проблеми на власні значення. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали міжнар. наук. конф. (Рівне, 19–22 лютого 2015 р.)*. Рівне, 2015. С. 147.
133. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №21. С. 205–212.
134. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в контактних задачах зі зношуванням. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали ІХ міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 12–13 травня 2015 р.)*. Луцьк, 2015. С. 342–344.
135. Сикорский Ю.В. Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. Изд. 2-е, испр. Москва: КомКнига, 2006. 368 с.
136. Скачков В.А., Иванов В.И., Грицай В.П. Математическая модель процесса износа многокомпонентных композитов в зоне трения. *Математичне моделювання*. 2009. №2. С.31–33.
137. Слободян Б.С., Мартиняк Р.М. Просторова контактна задача для пружних півпросторів, зазор між якими заповнений газом. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2008. Вип. 6. С. 183–186.
138. Солнцев Ю.П. Металоведения. Санкт-Петербург: Химиздат, 2007. 784 с.



139. Сорокати́й Р.В., Посонський С.Ф., Диха К.О. Моделювання зносоконтактних параметрів для циліндричних напрямних ковзання. *Проблеми трибології*. 2015. №1. С.37–43.
140. Старовойтов Э.И. Сопротивление материалов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
141. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. Москва: Мир, 1980. 446 с.
142. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 480 с.
143. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М., Куцик С.Л. Концентрація напружень та ефективні механічні характеристики пластинок із подвійно періодичними системами підкріплених отворів. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2012. № 3. С. 7–16.
144. Тенненбаум М.М. Сопротивление абразивному изнашиванию. Москва: Машиностроение, 1976. 271 с.
145. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости / пер. с англ.; ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. Москва: Наука, 1979. 560 с.
146. Третьяков А.А. Применение конического индентора для исследования напряженно-деформированного состояния. *Вестник Совета молодых учёных и специалистов Челябинской области*. 2014. №3. С. 28–34.
147. Улітко А.Ф., Острик В.І. Фрикційний контакт жорсткого конуса з пружним півпростором. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т. 54, №4. С.106–116.
148. Утенков В.М., Зайцев А.Н. Исследование триботехнических характеристик перспективных износостойких плазменных покрытий при трении скольжения без смазки. *Известия высших учебных заведений*. 2013. №11. С.81–89.
149. Федорченко Л.М., Жук Я.О. Аналіз напружено-деформівного стану ортотропної циліндричної оболонки при різних способах закріплення контуру. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2015. № 1. С. 49–52.

150. Фещенко В.Н. Справочник конструктора. Книга 1. Машины и механизмы. Москва: Инфра-Инженерия, 2016. 400 с.
151. Хрущев М.М., Бабичев М.А. Абразивное изнашивание. Москва: Наука, 1970. 252 с.
152. Чичинадзе А.В., Берлинер Э.М., Браун Э.Д. Трение, износ и смазка (трибология и триботехника). Москва: Машиностроение, 2003. 576 с.
153. Чумак К.А., Мартиняк Р.М. Локальне порушення контакту двох півбезмежних тіл, зумовлене змінним поверхневим термоопором. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 20. С. 350–356.
154. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. 501 с.
155. Широков В.В., Стецько А.Є., Широков О.В., Мельник Ю.А. Підвищення експлуатаційних характеристик робочих поверхонь швидкозношуваних деталей будівельних машин та устаткування дифузійним боруванням. *Містобудування та територіальне планування*. 2012. Вип. 45. С. 335–344.
156. Широков В.В., Білюк А.І. Формування та вплив інтерметалідних і нікелевих дифузійних покриттів на механічні властивості хромонікелевих сталей і сплавів. *Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ"*. 2013. №. 41, част. 2. С. 266-271.
157. Шишканова А.А. Нелинейный закон трения при моделировании пространственного контактного взаимодействия для двусвязных полигональных областей / А.А. Шишканова // *Вісник Дніпропетровського університету. Серія механіка.* – 2008. – №12. – С.174-181.
158. Шостак А.В., Широков В.В., Синій С.В., Варголяк М.Я. Дослідження зношування та зламів чавунних деталей сільськогосподарської техніки. *Сільськогосподарські машини*. 2013. Вип. 25. С. 181–189.
159. Шостак А.В., Широков В.В., Мельник В.М., Мельник Ю.А., Смола О.Ю. Кількісний аналіз мікроструктури в трибоматеріалознавстві із застосуванням Фур'є-аналізу та функцій Уолша. *Міжвузівський збірник "НАУКОВІ НОТАТКИ"*. 2013. №. 42. С. 324–329.

160. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 270 с.
161. Шульц В.В. Форма естественного износа деталей машин и инструмента. / Ленинград: Машиностроение, 1990. 208 с.
162. Эфрос Н.Б., Коршунов Л.Г., Эфрос Б.М., Тютенко В.С. Контактная прочность нанокристаллических структур поверхностей трения углеродистых аустенитных сплавов. *Физика и техника высоких давлений*. 2015. №3-4. С. 141–150.
163. Adibelli H., Comez I., Erdol R. Receding contact problem for a coated layer and a half-plane loaded by a rigid cylindrical stamp. *Archives of Mechanics*. 2013. Vol. 65, No.3. P. 219-236.
164. Basha H.K., Sushmitha K.D. Analysis of frictional sliding contact between a fiber reinforced polymer (FRP) composites and a rigid parabolic cylinder by using fem. *International Journal of Multidisciplinary Research and Development*. 2014. Vol. 1(7) P. 195–201.
165. Carlson B.C. A Table of elliptic Integrals of the third kind. *Mathematics of computation*. 1988. Vol. 51. P. 267–280.
166. Carlson B.C. Computing elliptic integrals by duplication. *Numerische Mathematik*. 1979. Vol. 33, No.1. P.1–16.
167. Ciavarella M., Ciavarella M., Menga N. A note on wear of elastic sliding parts with varying contact area. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2015. Vol. 10, No.1. P. 255–264.
168. Ciulcu C., Hoarau-Mante T.V., Sofonea M. Viscoelastic sliding contact problems with wear. *Mathematical and Computer Modelling*. 2002. Vol. 36, No7-8. P. 861–874.
169. Comez I. Frictional contact problem for a rigid cylindrical stamp and an elastic layer resting on a half plane. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47, No.7-8. P. 1090–1097.
170. Erdogan F., Guler M. Contact Mechanics of FGM Coatings. Ankara: Lehigh University Bethlehem, 2000. 276 p.

171. Feng Z.Q., Hjjaj M., Saxce de G., Mryz Z. Influence of frictional anisotropy on contacting surfaces during loading/unloading cycles. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2006. Vol. 41, No. 8. P. 936–948.
172. Ford W. Numerical Linear Algebra with Applications: using Matlab. New York: Academic Press, 2014. 628 p.
173. Frank W.J. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 951 p.
174. Fukushima T. Numerical inversion of general incomplete elliptic integral. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. Vol. 237, No. 1. P. 43–61.
175. Golpar-Raboky E.A. New Approach for Computing WZ Factorization. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*. 2012. Vol. 7, No. 2. P. 571–584.
176. Golpar-Raboky E.A. WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 2014. Vol. 40, No. 2 P. 399–411.
177. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. Baltimore: The Johns Hopkins University Pres, 2013. 756 p.
178. Gray N. Automatic reduction of elliptic integrals using Carlson's relations. *Mathematics of computation*. 2002. Vol. 71. P. 311–318.
179. Hlavacek M. Elliptical contact on elastic incompressible coatings. *Engineering mechanics*. 2008. Vol.15, No.4. P. 249–261.
180. Holmberg K., Ronkainen H., Laukkanen A. Wallin K. Friction and wear of coated surfaces – scales, modelling and simulation of tribomechanisms. *Surface & Coatings Technology*. 2007. Vol. 202. P. 1034–1049.
181. Holmberg K., Matthews A. Coatings tribology: properties, mechanisms, techniques and applications in surface engineering. Second Edition. Sheffield: The university of Sheffield UK, 2009. 549 p.
182. Jahedi R., Adibnazari S. Multi layered finite element analysis of graded coatings in frictional rolling contact. *Advanced design and manufacturing technology*. 2015. Vol. 8, No. 1 P. 1–12.

183. Kahya V., Birinci A., Erdol R. Frictionless contact problem between two orthotropic elastic layers. *International Journal of Civil, Architectural, Structural and Construction Engineering*. 2007. Vol. 1, No. 1. P. 7–13.
184. Ma L.F., Korsunsky A.M. Fundamental formulation for frictional contact problems of coated systems. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41, No. 11-12. P. 2837–2854.
185. Nabben R. Z-Matrices and Inverse Z-Matrices. *Linear Algebra and its Application*. 1997. Vol. 256. P. 31–48.
186. Okrouhlik M. Numerical methods in computational mechanics. Prague: Institute of Thermomechanics, 2008. 336 p.
187. Oner E., Yaylaci M., Birinci A. Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from FEM. *Structural Engineering and Mechanics*. 2015. Vol. 54, No. 4. P.607–622.
188. Ozgan K. Dynamic analysis of thick plates including deep beams on elastic foundations using modified Vlasov model. *Shock and Vibration*. 2013. Vol. 20, No. 1 P. 29–41.
189. Popov V.L. Contact Mechanics and Friction Physical Principles and Applications. New York: Springer, 2010. 367 p.
190. Rojek J., Telega J.J. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. Part I – general developments. *Journal of theoretical and applied mechanics*. 2001. Vol. 39, No. 3. P. 656–677.
191. Rončević B. Effect of friction on a receding contact between cylindrical indenter, layer and substrate. *Machines. Technologies. Materials*. 2016. Vol. 8, No. 2. P. 3–7.
192. Selvadurai A.P.S., Scarpas T., Kringos N. On a Winkler ligament contact between a rigid disc and an elastic halfspace. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3, No.10. P. 1875–1883.
193. Siau T., Bayen A. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers. New York: Academic Press, 2014. 311 p.

194. Soldatenkov I.A. The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 77, No. 2. P 245–255.
195. Stolz C. Thermodynamical Description of Running Discontinuities: application to friction and wear. *Entropy*. 2010. Vol. 12. P. 1418–1439.
196. Vanini S.A., Shahba M., Kordani N. Numerical investigation of sliding frictional contact in functionally graded steels (FGS). *Materials Research*. 2014. Vol. 17, No. 6. P. 1478–1484.
197. Whitehouse D.J. *Handbook of Surface and Nanometrology*. Second Edition. Warwick: University of Warwick Coventry UK, 2011. 957 p.
198. Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Hannover: University of Hannover, 2002. 437 p.
199. Zhang C., Wang J. Delamination of layered structures on elastic foundation. *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. Vol. 78, No. 6. P. 1055–1065.
200. Zhang C., Yu X. Neutral plane analysis of two-layer bonded concrete slab on Winkler foundation. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*. 2007. Vol. 7. P. 2030–2038.

## ДОДАТКИ

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Аналіз напружено-деформівного стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, №4. С. 162–167.  
Te same: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. 220, No. 2. P. 204–212.
2. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. №20. С. 180–187.
3. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2015. №2. С. 70–80.
4. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №21. С. 205–212.
5. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №22. С. 117–124.
6. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58, №4. С. 136–140.
7. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: матеріали міжнар. наук. конф. (Львів, 21–

- 25 травня 2013 р.). Львів, 2013. С. 72–73.
8. Сачук Ю.В. Контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми із пружним ізотропним півпростором. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 13–14 травня 2013 р.). Луцьк, 2013. С. 192–194.
  9. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: наукові праці IX міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів, 2014. С. 281–283.
  10. Сачук Ю.В. Еліптичні інтеграли в задачах математичного моделювання контактної взаємодії тіл. *Математика. Інформаційні технології. Освіта*: тези доповідей III міжнар. наук.-практ. конф. (Луцьк-Світязь, 6–8 червня 2014 р.). Луцьк-Світязь, 2014. С. 27–28.
  11. Сачук Ю.В. Застосування еліптичних інтегралів у задачі контактної взаємодії жорстких штампів різної форми із пружною півплощиною. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали VIII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 14-15 травня 2014 р.). Луцьк, 2014. С. 340-342.
  12. Сачук Ю.В. Контактна взаємодія тіл з покриттями із штампами канонічної форми з урахуванням зношування матеріалу. *Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини*: тези доповідей міжнар. наук.-практ. конф. (Миколаїв, 17–19 вересня 2015 р.). Миколаїв, 2015. С. 74–75.
  13. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів із пружною півплощиною з покриттям. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015*: матеріали відкр. наук.-тех. конф. молодих науковців і спеціалістів (Львів, 20–22 жовтня 2015р.). Львів, 2015. С. 71–72.
  14. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружним півпростором зі зношуванням матеріалу. *Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и*



- информационных технологиях*: тези доповідей X межд. науч. конф. для молодых учёных (Харків, 24–25 квітня 2015 р.). Харків, 2015. С. 45–46.
15. Сачук Ю.В. Математичні моделі із використанням узагальненої проблеми на власні значення. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали міжнар. наук. конф. (Рівне, 19–22 лютого 2015 р.). Рівне, 2015. С. 147.
  16. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в контактних задачах зі зношуванням. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали ІХ міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 12–13 травня 2015 р.). Луцьк, 2015. С. 342–344.
  17. Сачук Ю.В. Зношування пружної півплощини, захищеної шаром Вінклера штампами канонічної форми. *Сучасні проблеми термомеханіки*: зб. наук. праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів, 2016. С. 277–279. URL: <http://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016>