

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

САЧУК
Юрій Володимирович



УДК 539.3

**ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТА ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОЇ
ПІВПЛОЩИНИ З ПОКРИТТЯМ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Східноєвропейському національному університеті імені Лесі Українки Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Максимум Олександр Васильович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
професор кафедри вищої математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Вайсфельд Наталія Данилівна,
Одеський національний університет
імені І.І. Мечникова МОН України,
завідувач кафедри методів математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Мартиняк Ростислав Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
завідувач відділу математичних проблем контактної
механіки.

Захист відбудеться “ 4 ” грудня 2017 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано “ 2 ” листопада 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук



Ясінський А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблема контактної взаємодії різних за формою пружних тіл залишається головною при розрахунках надійності роботи контактних пар та фрикційних з'єднань. Дослідження таких процесів взаємодії достатньо якісно описується за допомогою математичного апарату контактної механіки в рамках лінійної теорії пружності. Для більшості плоских контактних задач для систем жорсткий штамп – пружна півплощина, відомі математичні моделі розглядають взаємодію тіл за достатньо малої області контакту. Це дає змогу моделювати гладкий штамп параболою. Однак в інженерній практиці часто зустрічаються випадки, де таке наближення не дає можливості адекватно оцінити реальну ситуацію. Тому актуальною є розробка та дослідження математичних моделей контактної взаємодії жорстких штампів різної канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною. Розв'язування задач такого типу зводиться до знаходження розв'язків сингулярних інтегральних рівнянь, які виражаються через еліптичні інтеграли першого і третього роду. Проте, на даний час, методи обчислення еліптичних інтегралів третього роду при вхідних параметрах на всьому діапазоні їх значень, зокрема при значних областях контакту, потребують додаткових досліджень.

Практично недостатньо вирішеною є і проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар та визначення допустимої величини зношування контактуючих поверхонь, за якої працюючий механізм не вийде з ладу. При розв'язуванні контактних задач із урахуванням зношування матеріалу необхідно враховувати низку специфічних особливостей: зміну області контакту, як від просторових координат так і часу, залежність розподілу контактного тиску від форми тіл, моделі зношування, фрикційного розігріву і т.п.

Розвиток аналітико-числових методів розв'язування інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь зі змінними межами інтегрування є ключовим аспектом у таких задачах контактної механіки.

У промисловості з метою оптимізації витрат по експлуатації та відновленні деталей машин та механізмів використовують різні способи та методи захисту від пошкодження та руйнування їх в процесі роботи. Одним із основних способів є застосування захисних покриттів у вигляді тонких накладок, напилень і пружних шарів. Для моделювання процесу роботи деталей із нанесеними на них тонкими покриттями в якості теоретичного узагальнення пружного шару часто використовується покриття Вінклера із одним або двома коефіцієнтами постелі. Такий підхід дозволяє вивчити вплив товщини, жорсткості захисного шару на величину та особливості розподілу контактного тиску. Удосконалення методик розв'язування таких задач із використанням поліномів Чебишова є актуальною теоретичною та прикладною задачею в даний час.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки МОН України: “Нові складні халькогеніди та галогеніди для нелінійної оптики, термо- та оптоелектроніки: синтез, структура і властивості” (№ д/р 0117U002303, 2017-2019

pp.) та “Екстремальні задачі теорії наближення у функціональних просторах” (№ д/р 0117U002304, 2017-2019 pp.).

Мета і задачі дослідження. Дослідити напружено-деформований стан у тілі під дією жорстких різних за формою штампів. Визначити особливості зношування півплощини штампами канонічної форми для змінних областей контакту. Дослідити вплив покриття Вінклера на розподіл контактного тиску за часом та просторовою координатою і зношування покриття. Досягнення мети передбачає:

- 1) розвиток методики розв’язування задач контактної взаємодії жорстких штампів з пружною півплощиною шляхом зведення їх до сингулярних інтегральних рівнянь з подальшим використанням повних еліптичних інтегралів третього роду;
- 2) дослідження і застосування основних методів знаходження наближених значень повних еліптичних інтегралів третього роду при вхідних параметрах на всьому діапазоні їх значень;
- 3) постановку контактних задач зі зношуванням на основі моделі абразивного зношування та побудову ключових інтегро-диференціальних рівнянь;
- 4) розробку методик розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь, що зводять задачу до узагальненої проблеми на власні значення та використання наближених методів розв’язування узагальненої проблеми на власні значення;
- 5) розвиток методики розв’язування плоских контактних задач із покриттям Вінклера з одним коефіцієнтом постелі для штампів канонічної форми у тому числі зі зношуванням матеріалу;
- 6) вивчення особливостей зношування покриття Вінклера та півплощини штампами різної форми у фіксовані моменти часу, при різних фізико-механічних характеристиках покриття та півплощини.

Об’єктом досліджень є контактна взаємодія пружної півплощини та півплощини захищеної покриттям із штампами різної канонічної форми, у тому числі зі зношуванням матеріалу.

Предметом досліджень є напружено-деформований стан пружної півплощини, процеси зношування півплощини або тонкого покриття півплощини.

Методи досліджень. В дисертації застосовувались: метод сингулярних інтегральних рівнянь; методи наближеного обчислення інтегралів, метод інтегралів Карлсона; метод розділення змінних; метод ортогональних поліномів Чебишова; методи Холецького та QZ-факторизації в ітераційних процесах розв’язування узагальненої проблеми на власні значення; методи розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів:

- 1) отримано розв’язки контактних задач про взаємодію жорстких штампів канонічної форми з пружною півплощиною, півплощиною захищеною покриттям, у тому числі задачі із урахуванням зношування;
- 2) розроблено методику побудови наближеного розв’язку сингулярних інтегральних рівнянь першого роду, яка зводить їх до обчислення повних еліптичних інтегралів третього роду за допомогою інтегралів Карлсона;
- 3) розвинуто методику зведення інтегральних рівнянь для контактних задач зі зношуванням матеріалу до узагальненої проблеми на власні значення та обчислення їх за методом Холецького і QZ-факторизації;

- 4) запропоновано алгоритм знаходження областей контакту для задачі про зношування тіла жорсткими штампами для будь-яких моментів часу роботи фрикційної пари;
- 5) розвинуто методику розв'язування сингулярного інтегро-дифференціального рівняння із використанням поліномів Чебишова, яка зводить контактну задачу про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера до системи лінійних алгебричних рівнянь;
- 6) досліджено вплив співвідношень фізико-механічних властивостей покриття і основи на розподіл контактної тиску між штампом та покриттям;
- 7) проведено розрахунки компонент напружень в півплощині із подальшим використанням отриманих значень для визначення точок межі текучості та оцінку їх величини для різних пар матеріалів;
- 8) виявлено особливості зношування покриття штампами різної форми при різних областях контакту;
- 9) запропоновано методику визначення величини зношування у фіксований момент часу в довільній точці області контакту.

Практичне значення отриманих результатів. Результати досліджень контактної взаємодії різних штампів із пружною півплощиною можуть використовуватись для визначення характеру розподілу та величини компонент напружено-деформованого стану в тілі в залежності від геометричних і механічних параметрів фрикційної пари.

Запропоновані та розвинуті методики розв'язування задач контактної взаємодії про зношування пружної півплощини та тонкого покриття можуть бути ефективно використані для встановлення якісних та кількісних закономірностей впливу геометричних, фізико-механічних характеристик тіл, що контактують, на контактну жорсткість і зносостійкість конкретних вузлів тертя.

Достовірність одержаних результатів забезпечується строгістю математичних постановок задач контактної взаємодії із використанням основних співвідношень теорії пружності; використанням обґрунтованих та збіжних аналітико-числових математичних методів до розв'язування отриманих інтегральних та інтегро-дифференціальних сингулярних рівнянь; узгодженням отриманих чисельних результатів із теоретичними частковими випадками, описаними у науковій літературі.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані здобувачем самостійно. Роботи [1-3, 5, 6, 7, 9] виконані у співавторстві з науковим керівником, професором О.В. Максимуком. Праці [4, 8, 10-17] опубліковано автором одноосібно.

У спільних роботах автору належить участь у формулюванні та постановці задач, розробка алгоритмів та їх програмно-чисельна реалізація, проведення числових експериментів та формулювання висновків. Науковому керівнику належать визначення напрямку досліджень, математична постановка задач та вибір методів їх розв'язування, участь в обговоренні результатів та формулюванні висновків.

Апробація результатів. Основні положення і результати дисертації доповідались і обговорювались на: Міжнародній науковій конференції "Сучасні

проблеми механіки та математики” (Львів, 2013, 2014, 2015); VII, VIII, IX Міжнародній науково-практичній конференції “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень” (Луцьк, 2013, 2014, 2015); IX Міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2014); III Міжнародній науково-практичній конференції “Математика. Інформаційні технології. Освіта” (Луцьк-Світязь, 2014); Міжнародній науково-практичній конференції “Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини” (Миколаїв, 2015); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015); X международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” (Харків, 2015); Відкритій науково-практичній конференції молодих науковців і спеціалістів “Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015” (Львів, 2015); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми термомеханіки” (Львів, 2016).

Дисертація в цілому доповідалася та обговорювалася на спільному науковому семінарі кафедри експериментальної фізики та інформаційно-вимірjuвальних технологій Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки МОН України та кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. С.А. Федосова (м. Луцьк, 2017 р.); на науковому семінарі відділу моделювання композитних структур і складних систем під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М.В. Марчука та загальноінститутському науковому семінарі “Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ” під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Г.С. Кіта Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (м. Львів, 2017 р.); на науковому семінарі кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету МОН України під керівництвом д.т.н., проф. В.І. Швабюка (м. Луцьк, 2017 р.); на науковому семінарі “Математичні проблеми механіки” Одеського національного університету імені І.І. Мечникова МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Вайсфельд (м. Одеса, 2017 р.).

Публікації. За матеріалами дисертаційного дослідження опубліковано 17 наукових праць [1-17], зокрема, 6 статей [1-6] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України та 11 тез доповідей у збірниках праць наукових конференцій [7-17]. Праці [1, 6] опубліковані в журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 46 рисунків, висновків, списку літератури із 200 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 129 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 107 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено її зв'язок з науковою тематикою установи, в якій працює автор; сформульовано мету і задачі дослідження; охарактеризовано наукову новизну, достовірність та практичну цінність отриманих результатів та наведено дані про їх апробацію; вказано кількість публікацій за темою дисертації та особистий внесок здобувача у публікаціях, виконаних у співавторстві, описано структуру роботи.

У **першому** розділі наведено огляд наукових праць з механіки контактної взаємодії, що є близькими за напрямком до теми дисертації, як у вітчизняній, так і в закордонній літературі. Окреслено місце роботи серед сучасних досліджень з цієї проблематики та перспективи досліджень.

У **другому** розділі досліджено контактні задачі для визначення контактного тиску та напружено-деформованого стану в пружній півплощині під дією різних за формою штампів (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна). Основне інтегральне рівняння задачі було зведено до обчислення повних еліптичних інтегралів першого та третього роду.

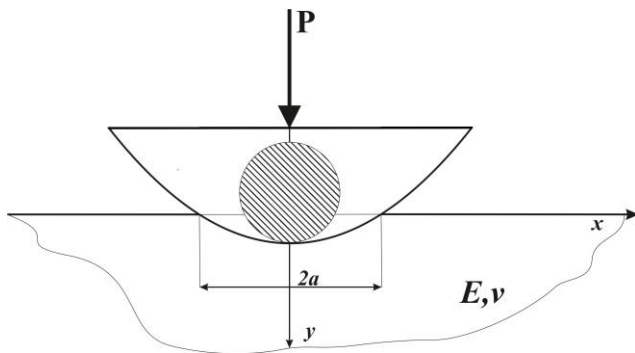


Рис. 1

Розглянуто взаємодію жорсткого штампа з пружною півплощиною, яка знаходиться в умовах плоскої деформації. В таку півплощину під дією вертикальної сили P вдавлюється жорсткий штамп з основою $f(x)$ (рис. 1).

Тут $2a$ – область контакту, E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона півплощини. Під штампом дотичні напруження відсутні, а інтегральне рівняння для визначення

контактного тиску має вигляд:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E_*}{2} \frac{df(x)}{dx}, \quad (1)$$

де $\frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}$, $p(x)$ – контактний тиск, E_p , ν_p – пружні характеристики штампа.

Рівняння (1) є сингулярним інтегральним рівнянням першого роду на скінченному відрізку. Розв'язок інтегрального рівняння (функція контактного тиску), який є обмеженим на кінцях області контакту (штампи без кутових точок), має вигляд:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{f'(s)}{\sqrt{a^2-s^2}(x-s)} ds, \quad (2)$$

при умовах: $p(\pm a) = 0$, $P = \int_{-a}^a p(x) dx$, $\int_{-a}^a \frac{f'(s)}{\sqrt{a^2-s^2}} ds = 0$.

Досліджено контактну взаємодію пружної півплощини зі штампами:

- 1) параболічної форми $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$, де R – радіус кривизни в точці $x=0$;
- 2) циліндричної форми $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R – радіус циліндра;
- 3) еліптичної форми $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 – велика та мала

півосі еліпса;

- 4) гіперболічної форми $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$, де a_1, b_1 – величини дійсної

та уявної півосей гіперболи.

Для розрахунків $a_1 = R$, $b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ у штампах еліптичної та гіперболічної форми. Для зручності математичних перетворень та обчислень введемо безрозмірні величини $\bar{a} = \frac{a}{R}$, $\bar{x} = \frac{x}{R}$, $\bar{p}(\bar{x}) = \frac{p(x)}{E_*}$, $\bar{P} = \frac{P}{E_* R}$.

Для прикладу, контактний тиск за формулою (2) штампа циліндричної форми набуде вигляду:

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \int_{-a}^a \frac{s ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x - s)}. \quad (3)$$

Контактний тиск (3) після відповідних математичних перетворень набере вигляду:

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{E_*}{2\pi} \sqrt{\bar{a}^2 - \bar{x}^2} (RI_1^c - RxI_3^c), \quad (4)$$

де $RI_1^c = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2}}$, $RxI_3^c = 2\bar{x}^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\bar{a}^2 t^2} (1-t^2 \bar{a}^2)}$ є повними еліптичними

інтегралами першого і третього роду. Для інших штампів загальний вигляд контактного тиску зводиться до вигляду (4).

В загальному випадку будь-який еліптичний інтеграл третього роду $\Pi(n, k, \varphi)$ залежить від трьох параметрів n, k, φ , де n, k є числовими параметрами і залежать від форми штампа. Оскільки при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ у традиційних методах обчислення еліптичного інтегралу третього роду отримані ряди погано збігаються в дисертації використано роботи Б. Карлсона, в яких запропоновано метод послідовного обчислення еліптичних інтегралів, що базується на застосуванні теореми про дублювання.

Розподіли контактного тиску для малої області контакту $\frac{a}{R} < 0.1$ практично співпадають для всіх форм штампів і є аналогічними до розподілу контактного тиску для штампа параболічної форми. Цей факт також підтверджується, якщо провести розклад функцій, що описують форму штампа, в околі точки $x = 0$.

На рис.2 наведено графік контактного тиску для штампа циліндричної форми при $a/R = 0.1$

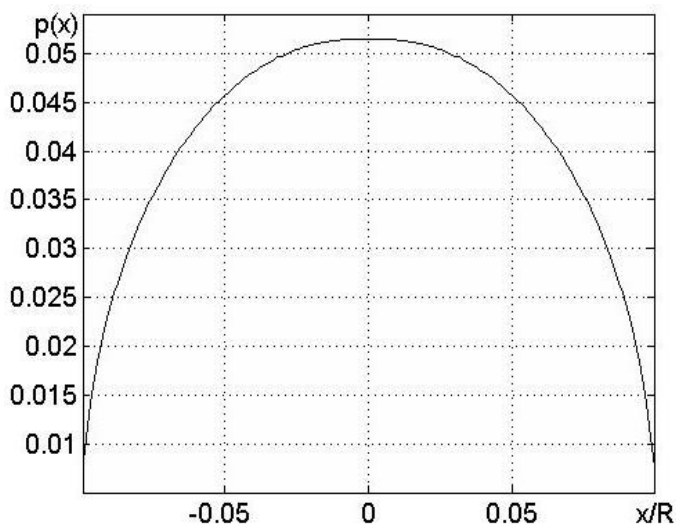


Рис. 2

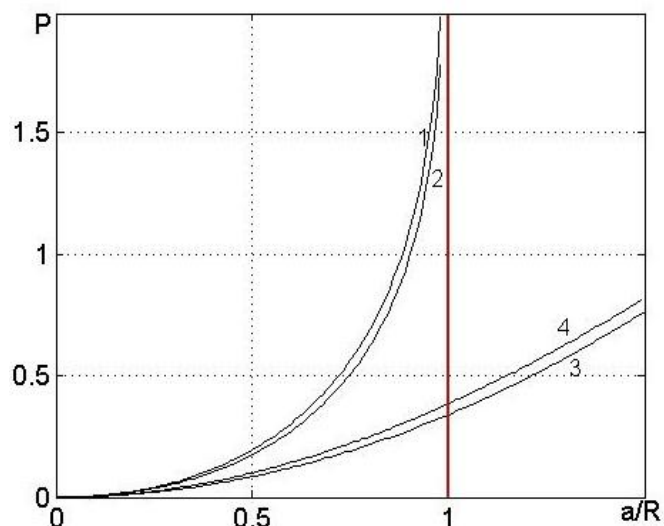


Рис. 3

На рис. 3 наведено залежності величини області контакту від величини сили прикладеної до штампа (1 – циліндрична форма, 2 – еліптична форма, 3 – гіперболічна форма, 4 – параболічна форма штампів). Для штампів циліндричної та еліптичної форм при наближенні області контакту до діаметра штампа притискаюча сила прямує до нескінченості ($\bar{P} \rightarrow \infty$), $x=1$ є асимптотою, для параболічного та гіперболічного штампів область контакту необмежено збільшується при збільшенні притискаючої сили. Як показали подальші дослідження розподілу контактного тиску і напруженого стану у півплощині для $\frac{a}{R} > 0.3$ обмежитись першим наближенням форми штампа (як параболічного) вже недостатньо і потрібно враховувати загальний вигляд форм контактуючих тіл.

Напружений стан в середині півплощини пораховано за відомими формулами:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2} \quad (5)$$

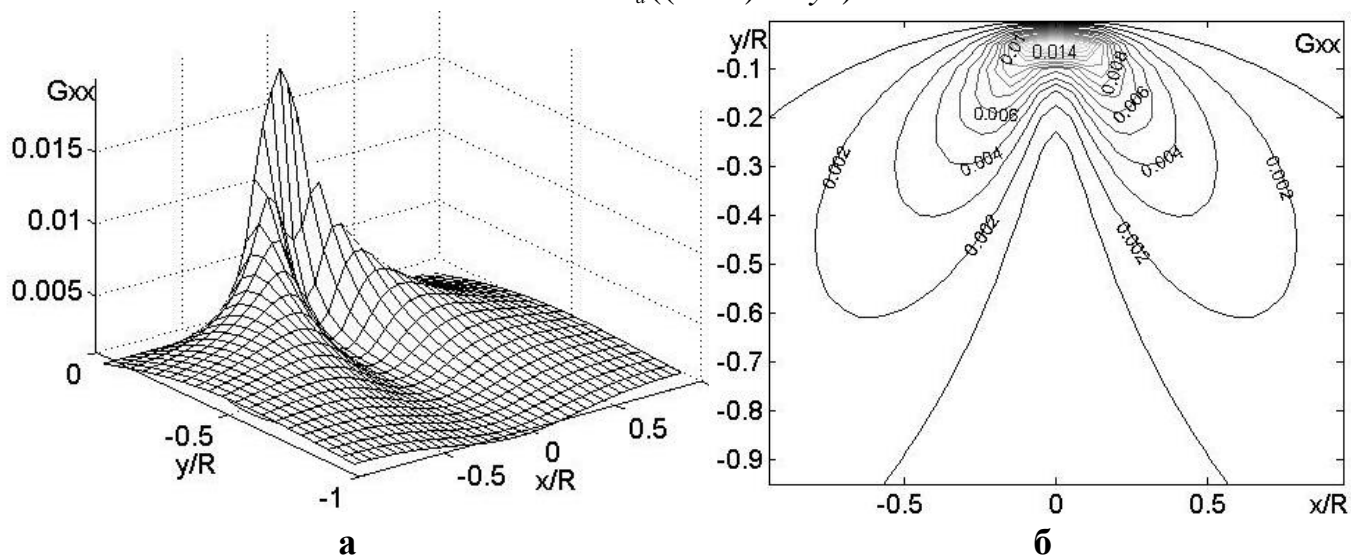


Рис. 4

Показовими для аналізу напруженого стану в півплощині є 3D-зображення та

лінії рівня. Для подальших числових розрахунків введемо наступне позначення

$$G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_*}$$

На рис. 4 наведено розподіл безрозмірного напруження σ_{xx} для штампа еліптичної форми при $a/R=0.1$ та $\varepsilon=0.1$:

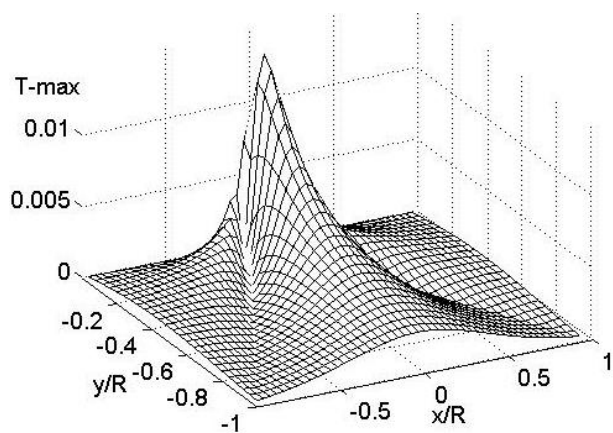


Рис. 5

рис. 4.а – 3D-зображення, рис. 4.б – лінії рівня. В дисертації пораховані всі компоненти напружень у півплощині для всіх форм штампів при різних областях контакту у формі 3D та ліній рівня.

Важливим параметром напружено-деформованого стану є максимальне дотичне напруження. Для визначення меж зон течучості в дисертації було використано теорію максимальних дотичних напружень Треска-Сен-Венана:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{\sigma_T}{2}, \quad (6)$$

де σ_T – границя текучості.

Маючи розподіл максимальних дотичних напружень, в роботі проведені розрахунки величини межі текучості. На рис. 5 наведено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*}$ для штампа еліптичної форми при $a/R=0.1$ та $\varepsilon=0.1$,

$\max \bar{\tau}_{\max} = 0.0139$ в точці $(\frac{x_1}{R}=0; \frac{y_1}{R}=0.08)$. На рис. 6 наведено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max}$ за допомогою ліній рівня, які відповідають 3D-зображенню, показаному на рис. 5 та визначена зона текучості для пари титан ВТ1-1 – алюмінієвий сплав В96. На рис. 7 – для пари титан ВТ1-1 – латунь Л68.

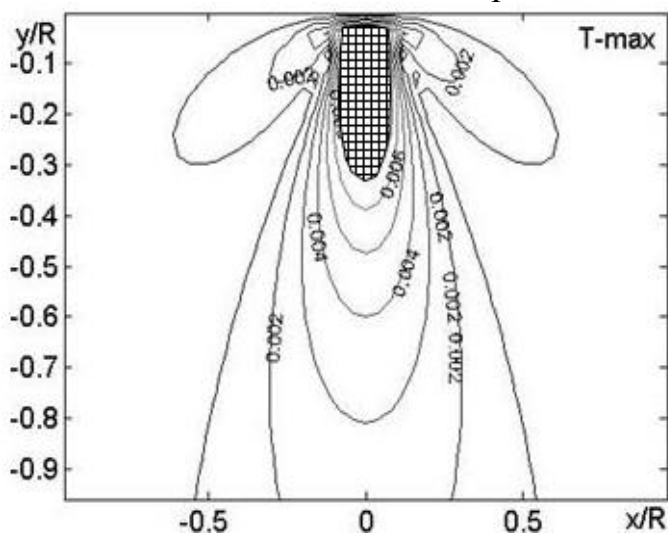


Рис. 6

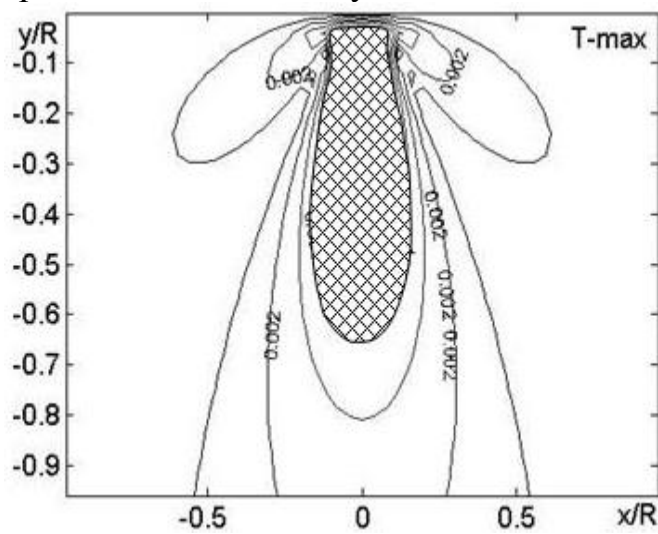


Рис. 7

Із розрахунків на рис.6 і рис.7 видно, що для другої пари зона текучості є

значно більшою за однакової області контакту.

У **третьому** розділі розглянуті контактні задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. Побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння задачі та розвинута методика розділення змінних для розв'язування цього рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення.

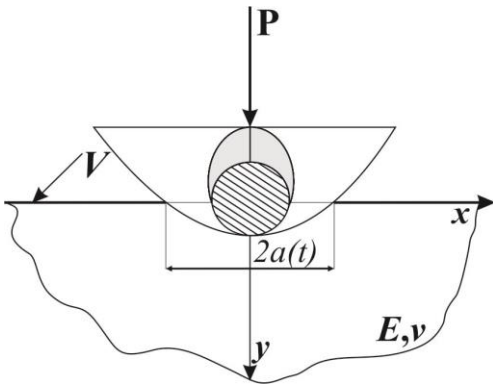


Рис. 8

Розглянуто контактну задачу про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. У пружну півплощину вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$. Крім того, штамп рухається зі швидкістю V у напрямку, перпендикулярному до площини рис. 8. Внаслідок цього відбувається абразивне зношування матеріалу за лінійної залежності сили тертя із силою тиску. Вважається, що сила тертя пов'язана з контактним тиском законом Кулона із коефіцієнтом тертя k_1 і у

випадку лінійної моделі зношування сингулярне інтегро-диференціальне рівняння задачі матиме вигляд:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (7)$$

де $\alpha = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$, k_2 – коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу, $p(x, t)$ – контактний тиск.

Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dx, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (8)$$

Для розв'язування рівняння (7) використано метод розділення змінних та поліноми Чебишова. Контактний тиск шукаємо у вигляді:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}, \quad (9)$$

де α_{2k} – власні значення, $e^{-\alpha_{2k} t}$ – лінійно незалежні функції.

Для подальших міркувань та зручності числових розрахунків введено безрозмірні величини: $p(x, t) = p'(x', t') \alpha$, $f(x) = f'(x') a$, $x' = \frac{x}{a}$, $t = t' a / (\alpha k_1 k_2 V)$,

надалі штрихи упускаємо. Після підстановки (9) у (7) та проведення математичних перетворень отримано систему інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь, одне з яких неоднорідне (10), а інші однорідні (11):

$$\int_{-1}^1 p(\tau, 0) \frac{d\tau}{\tau - x} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (10)$$

$$\alpha_{2k} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}(\tau) \frac{d\tau}{\tau-x} - \frac{d\varphi_{2k}(x)}{dx} = 0, \text{ при } k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Функції $\varphi_{2k}(x)$ записано у вигляді рядів за поліномами Чебишова другого роду (штамп має заокруглені краї). Функції $\varphi_{2k}(x)$ утворюють базис в просторі L_2 і мають вигляд:

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x), \quad (12)$$

де $U_n(x)$ – поліноми Чебишова другого роду.

Підставивши (12) у (11), провівши математичні перетворення із застосуванням поліномів Чебишова, отримано узагальнену задачу на власні значення:

$$(A - a_{2k}B)X = 0, \quad (13)$$

де α_{2k} – власні значення, a_m^k – власні вектори, а $X = X(a_0^k, a_1^k, \dots)$.

На даний час відсутні теоретично обґрунтовані алгоритми безпосереднього розв'язування узагальненої задачі на власні значення. Ці підходи можна умовно поділити на дві групи. До першої групи належать алгоритми, які потребують попередньо спеціального зведення матриць до певної стандартної форми (метод Холецького) за умов, що початкові (вхідні) матриці мають бути додатно визначені та симетричні; до другої належать ітераційні методи, що не потребують спеціального зведення QZ, QW-алгоритми факторизації.

На основі отриманих вхідних даних знайдено власні вектори та значення за описаним методом розкладу Холецького. Для достовірності отриманих результатів задачу на власні значення (13) було розв'язано також і методом QZ-факторизації.

Важливо відмітити, що власні значення α_{2k} за обома методами співпадають, але власні вектори a_m^k однакові з точністю до постійного множника. Важливо відмітити, що розв'язок системи (11) не залежить від форми штампа. При побудові ряду для контактного тиску за формулою (9), важливим чинником є кількість членів ряду, тобто скільки власних значень звято для обчислень. В табл. 1 наведено власні значення при $n = 7, 11$ для узагальненої проблеми (13), де n – кількість членів ряду (9).

Таблиця 1 - Власні значення для матриць A, B

n=7	0.63	1.63	2.62	3.63	4.84	7.48	23.22				
n=11	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.68	8.11	10.88	17.45	55.49

Для однозначного визначення a_m^k , $\varphi_{2k}(x)$ записано у вигляді:

$$\varphi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x). \quad (14)$$

Підставивши (14) у рівняння (10), дістаємо співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{m=0}^n a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) = -\frac{df(x)}{dx}. \quad (15)$$

Домножаючи кожен член (15) на $T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$ при $i = \overline{1, n}$ та інтегруючи від

-1 до 1, отримуємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$CX = b, \quad (16)$$

де

$$C = \frac{-\pi^2}{2} \begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \dots & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{vmatrix}, \quad (17)$$

b – стовпчик вільних членів, елементи якого визначаються за наступною формулою:

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}, \quad b_i = \int_{-1}^1 -f'(x)T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2} dx, \quad \text{при } i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

На рис. 9 наведено контактний тиск для штампа циліндричної форми при заданій силі $P = 0.1015$ та відповідній їй області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.2$, у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$ та знайдено відповідні області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.223$, $\frac{a_2}{R} = 0.242$, $\frac{a_3}{R} = 0.263$. Крива 1 на цьому рисунку відповідає часу $t_0 = 0$, крива 2 – t_1 , крива 3 – t_2 , крива 4 – t_3 .

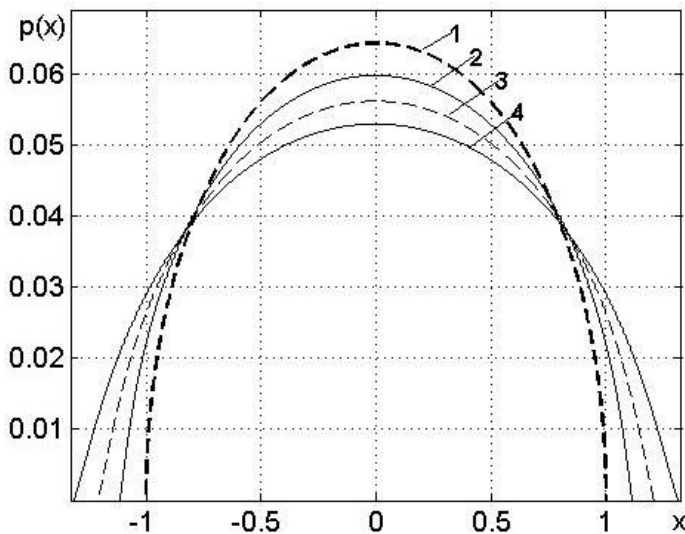


Рис. 9

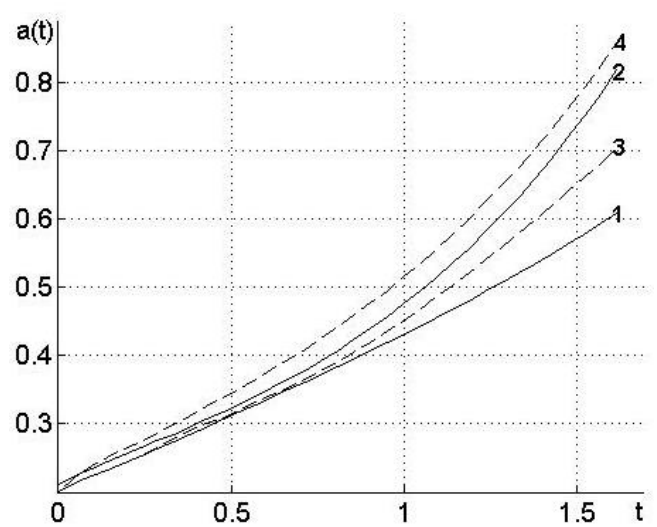


Рис. 10

Рис. 9 наочно ілюструє зміну контактної тиску в процесі зношування відносно початкової області контакту $\frac{a_0}{R}$ та показує, що зі збільшенням часу роботи в кожен наступний момент часу t зменшується його максимум в точці $x = 0$.

На рис.10 (1 – циліндрична форма, 2 – еліптична форма, 3 – гіперболічна форма, 4 – параболічна форма штампів) наведено залежності величини області контакту від величини часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.2$ та $\varepsilon = 0.1$. Для всіх штампів при $t < 0.6$ (безрозмірний час роботи

фрикційної пари) розподіли зміни області контакту є близькими, однак, вже при $t > 0.6$ розподіли зміни області контакту починають значно відрізнятися із збільшенням t .

У четвертому розділі розглянуто контактні задачі про контактну взаємодію жорстких тіл (штампів) канонічної форми з пружною півплощиною захищеною покриттям Вінклера, у тому числі із урахуванням зношування.

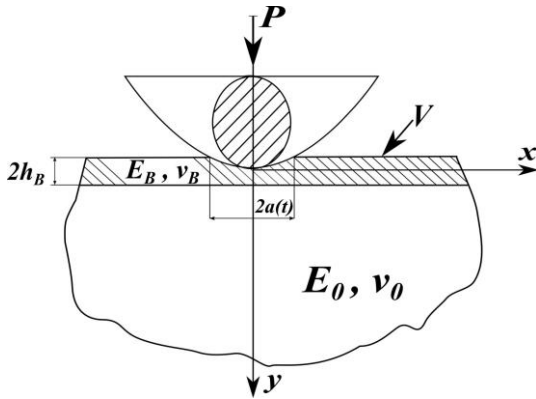


Рис. 11

площини рис. 11. Абразивне зношування між штампом і покриттям моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя, аналогічно як у попередньому розділі.

Тонке пружне покриття моделюємо шаром Вінклера з одним коефіцієнтом постелі (це закономірно для випадку, коли жорсткість покриття менша або співвимірна жорсткості основного тіла). У цьому випадку прогин покриття

$$w_B = K_B p(x, t). \quad (19)$$

Коефіцієнт Вінклера має вигляд:

$$K_B = 2h_B(1 - 2\nu_B)(1 + \nu_B)/(E_B(1 - \nu_B)). \quad (20)$$

Основне інтегральне рівняння задачі має вигляд:

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + K_B p'(x, t) + k_1 k_2 V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t), \quad (21)$$

$$\text{де } \theta = \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2)}.$$

Інтегральне рівняння (21) залежить від двох змінних x та t . Для розв'язування рівняння застосовано покроковий алгоритм за часом. За цим алгоритмом розбиваємо час роботи фрикційної пари зі зношуванням на малі відрізки Δt . Припускаємо, що на кожному з часових відрізків контактний тиск і область контакту є сталими (незалежні від часу).

На початковому етапі розв'язування при $t = 0$ інтегральне рівняння буде мати вигляд:

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi + K_B p'_0(x), \quad |x| \leq a_0. \quad (22)$$

Для зручності розв'язування інтегрального рівняння та в подальших обчисленнях введемо безрозмірні величини $\bar{x} = x/a_0$, $\bar{p}_0 = p_0/\theta$, $\bar{h}_B = (h_B/R)/(a_0/R)$, (рисочки надалі опускаємо).

Відповідно до введених позначень, рівняння (22) набуде вигляду:

$$p_0'(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_0}{R} \lambda \mathcal{P}'(x), \quad (23)$$

де $\lambda = a_0 / (\pi \theta K_B)$, R – радіус кривизни в точці $x=0$ для всіх форм штампів.

На покриття із сталою силою P діє заокруглений штамп (форми якого приведені у розділі 2), задача є симетрична, а система поліномів Чебишова другого роду є повною з вагою $\sqrt{1-x^2}$ на проміжку $[-1, 1]$, тому згідно з вибраним математичним апаратом розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 U_{2m}(x), \quad (24)$$

Після підстановки (24) в рівняння (23) та проведення відповідних математичних перетворень, із використанням поліномів Чебишова, отримаємо нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь в матричному вигляді:

$$AX = C \quad (25)$$

де $X = X(b_{20}^0, b_{21}^0, b_{22}^0 \dots)$.

Матриці A та C мають вигляд:

$$\begin{cases} a_{mm} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2m+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda}, & C = C(c_0, c_1, \dots, c_i, \dots), \\ a_{mk} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx. & c_k = -\frac{a_0}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx \end{cases} \quad (26)$$

Зв'язок між величинами P_0 та a_0 при $t=0$ будемо шукати із умови рівноваги штампів $P_0 = \int_{-a_0}^{a_0} p_0(x) dx$.

Розв'язавши систему (25), отримаємо числові коефіцієнти для функції контактної тиску записаного у вигляді (24).

На наступному кроці при $t > 0$ тобто, $t \in [0, t_1 = \Delta t]$, для знаходження контактної тиску $p_1(x)$ інтегральне рівняння (1) набуде вигляду:

$$p_1'(x)(1 + \lambda \delta \Delta t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_1(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_1}{R} \lambda \mathcal{P}'(x) \quad (27)$$

Розв'язок рівняння (27) знаходимо аналогічно як при $t=0$, при цьому невідомі коефіцієнти $b_{2m}^{(1)}$ визначаємо із системи (25), провівши заміну λ на $\lambda_* = \lambda / (1 + \lambda \delta \Delta t)$, де $\delta = \pi k_1 k_2 V \theta / a_1$.

На наступному кроці $t \in [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ знаходимо $p_2(x)$. Коефіцієнти $b_{2m}^{(2)}$, які є основою ряду (24) знаходимо із системи (25), в якій $\lambda = \lambda_*$ а до правої частини потрібно додати доданок накопичення $\delta \Delta t b_{2m}^{(1)} (2k+1)/2$.

Вплив товщини покриття на розподіл контактної тиску при $t=0$ показано рис. 12. На рис.12 наведено графіки контактної тиску для штампів циліндричної форми для області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.1$, $\frac{E_B}{E_0} = 0.9$, за різної товщини шару Вінклера h_B і відповідній притискаючій силі P . Крива 1 на цьому рисунку відповідає значенню

$h_B = 1, P_1 = 0.002$; крива 2 – $h_B = 1.2, P_2 = 0.0017$; крива 3 – $h_B = 1.4, P_3 = 0.0015$.

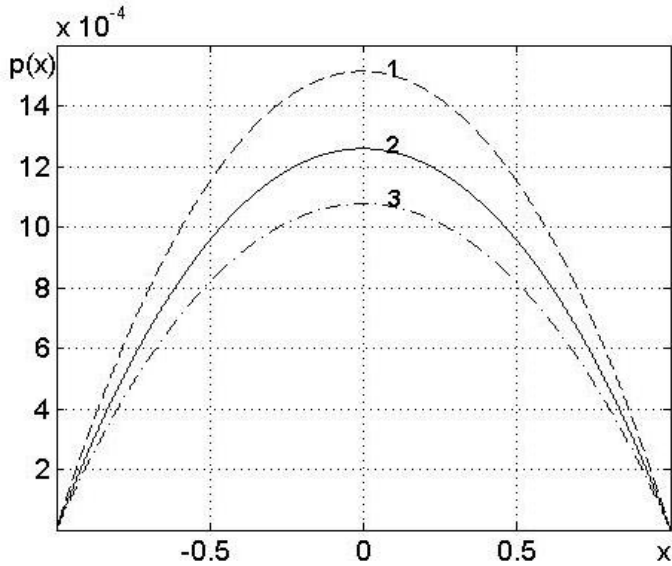


Рис. 12

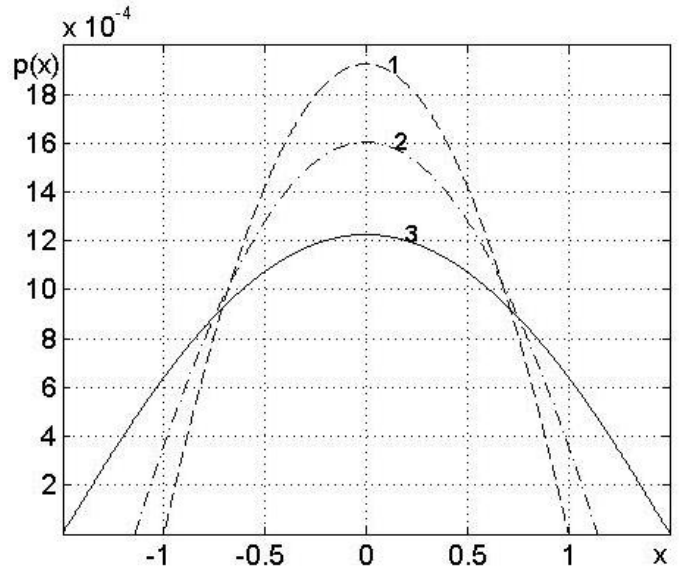


Рис. 13

Варто відзначити, що при малих початкових областях контакту $\frac{a_0}{R} < 0.1$ контактний

тиск для всіх штампів практично співпадає з контактним тиском для штампа параболічної форми. На рис. 13 наведено контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-}40\%\text{TiO}_2$. Тут штамп є гіперболічної форми при заданій силі $\bar{P} = 0.0029$, $\varepsilon = 0.1$, $h_B = 1$ та $t_0 = 0$, $t_1 = 100\text{с}$, $t_2 = 200\text{с}$ було знайдено відповідні

області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.1118$, $\frac{a_1}{R} = 0.122$, $\frac{a_2}{R} = 0.16$, яким на рис. 13 відповідають криві 1, 2, 3.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання, що полягає у розвиненні методик дослідження задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми із пружною півплощиною та визначенню напружено-деформованого стану в півплощині, задач про контактну взаємодію цих штампів з півплощиною із урахуванням зношування матеріалу, у тому числі із пружною півплощиною, яка захищена тонким пружним шаром Вінклера.

Отримано такі основні наукові результати:

- 1) Проведено дослідження плоских задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною та проведено аналіз особливостей розподілу контактного тиску і напружень у півплощині.
- 2) Розроблено схеми обчислення повних еліптичних інтегралів третього роду, через які визначається контактний тиск у всьому діапазоні вхідних параметрів задачі, а також запрограмовано алгоритми розрахунків напружень та меж текучості у півплощині в залежності від форми штампа та величини навантаження контактної пари.

- 3) Для контактної задачі зі зношуванням на основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактної тиску. Розроблено методику розв'язування цього рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення.
- 4) Досліджено особливості застосування основних методів для знаходження наближених власних значень. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для реалізації математичних моделей контактних задач зі зношуванням, визначено оптимальну кількість власних значень для різних канонічних форм штампа.
- 5) Для системи: жорсткий штамп – тонке покриття (шар Вінклера) – пружна півплощина, побудовано математичну модель задачі та розвинуто метод розв'язку із використанням поліномів Чебишова. Розвинуто покроковий алгоритм пошуку розв'язку сингулярного інтегро-диференціального рівняння зі змінними межами інтегрування, що зводить задачу до розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.
- 6) Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття штампами канонічної форми для контактних пар з різними фізико-механічними властивостями.

У результаті числових експериментів встановлено:

- у всіх розглянутих задачах форма штампа при контакті із пружною півплощиною при малих областях контакту $\frac{a_0}{R} < 0.1$ несуттєво впливає на розподіл контактної тиску;
- при областях контакту (у задачах зі зношуванням) $\frac{a_0}{R} \in (0.1; 0.3)$ форма штампа суттєво впливає на процес взаємодії та числові розрахунки;
- для всіх форм штампів зберігається тенденція збільшення відстані від поверхні до точки максимуму максимального дотичного напруження в залежності від величини навантаження контактної пари;
- на величину межі текучості впливає: величина області контакту, форма штампа, співвідношення модулів пружності контактної пари та границя текучості матеріалу основи;
- при зношуванні півплощини штампами (циліндричної, еліптичної) скінченної форми спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із значним збільшенням часу взаємодії;
- при зношуванні покриття встановлено, що для забезпечення стійкості обчислювальних схем та достовірності результатів жорсткість покриття має бути меншою жорсткості півплощини $\frac{E_B}{E_0} < 1$;
- встановлено, що основним параметром, котрий суттєво впливає на процес зношування тонкого покриття, є інтенсивність зношування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Аналіз напружено-деформівного стану у тілі під

дією різних за формою жорстких штампів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, №4. С. 162–167.

Te same: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. 220, No. 2. P. 204–212.

2. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. №20. С. 180–187.
3. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2015. №2. С. 70–80.
4. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №21. С. 205–212.
5. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. №22. С. 117–124.
6. Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58, №4. С. 136–140.
7. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: матеріали міжнар. наук. конф. (Львів, 21–25 травня 2013 р.). Львів, 2013. С. 72–73.
8. Сачук Ю.В. Контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми із пружним ізотропним півпростором. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 13–14 травня 2013 р.). Луцьк, 2013. С. 192–194.
9. Максимук О.В., Сачук Ю.В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: наукові праці IX міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів, 2014. С. 281–283.
10. Сачук Ю.В. Еліптичні інтеграли в задачах математичного моделювання контактної взаємодії тіл. *Математика. Інформаційні технології. Освіта*: тези доповідей III міжнар. наук.-практ. конф. (Луцьк-Світязь, 6–8 червня 2014 р.). Луцьк-Світязь, 2014. С. 27–28.
11. Сачук Ю.В. Застосування еліптичних інтегралів у задачі контактної взаємодії жорстких штампів різної форми із пружною півплощиною. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали VIII міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 14-15 травня 2014 р.). Луцьк, 2014. С. 340-342.
12. Сачук Ю.В. Контактна взаємодія тіл з покриттями із штампами канонічної форми з урахуванням зношування матеріалу. *Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини*: тези доповідей міжнар. наук.-практ. конф.

- (Миколаїв, 17–19 вересня 2015 р.). Миколаїв, 2015. С. 74–75.
13. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів із пружною півплощиною з покриттям. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015: матеріали відкр. наук.-тех. конф. молодих науковців і спеціалістів (Львів, 20–22 жовтня 2015р.)*. Львів, 2015. С. 71–72.
 14. Сачук Ю.В. Математична модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружним півпростором зі зношуванням матеріалу. *Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тези доповідей X межд. науч. конф. для молодых учёных (Харків, 24–25 квітня 2015 р.)*. Харків, 2015. С. 45–46.
 15. Сачук Ю.В. Математичні моделі із використанням узагальненої проблеми на власні значення. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали міжнар. наук. конф. (Рівне, 19–22 лютого 2015 р.)*. Рівне, 2015. С. 147.
 16. Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в контактних задачах зі зношуванням. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали ІХ міжнар. наук.-практ. конф. студентів і аспірантів (Луцьк, 12–13 травня 2015 р.)*. Луцьк, 2015. С. 342–344.
 17. Сачук Ю.В. Зношування пружної півплощини, захищеної шаром Вінклера штампами канонічної форми. *Сучасні проблеми термомеханіки: зб. наук. праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.)*. Львів, 2016. С. 277–279. URL: <http://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016>

Анотація. Сачук Ю.В. Плоскі контактні задачі та зношування пружної півплощини з покриттям штампами канонічної форми. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла. - Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2017.

Дисертаційна робота стосується дослідження задач про контактну взаємодію жорстких штампів канонічної форми (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна) із пружною півплощиною для визначення контактного тиску та напружено-деформованого стану в пружній півплощині, дослідженню задач про контактну взаємодію штампів з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу, у тому числі із півплощиною, яка захищена тонким пружним шаром.

Для плоскої контактної задачі отримано аналітичний розв'язок сингулярного інтегрального рівняння для всіх форм штампів, який для циліндричного, гіперболічного та еліптичного штампів зводиться до обчислення повних еліптичних інтегралів першого та третього роду в широкому діапазоні значень. Розроблено алгоритм та налагоджено схеми для обрахунку контактного тиску і компонент напружень, визначено межі текучості.

Для контактної задачі зі зношуванням півплощини побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розвинуто метод розділення змінних для розв'язування інтегрального рівняння, що зводить

задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Досліджено особливості застосування основних методів для знаходження наближених власних значень. Побудовано схеми обчислень та програмні модулі для розв'язування узагальненої проблеми на власні значення, визначено оптимальну кількість власних значень для достовірності результатів. Досліджено особливості зношування півплощини канонічними штампами за різної кривизни штампів в різні часові моменти, виявлено особливі ефекти взаємодії тіл.

Для контактної задачі про зношування тонкого пружного шару Вінклера побудовано математичну модель задачі та розвинуто метод розв'язку із використанням поліномів Чебишова. Розвинуто покроковий алгоритм пошуку розв'язку інтегро-диференціального рівняння для контактної тиску, що зводить задачу до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь. Досліджено особливості зношування покриття канонічними штампами для різних контактних пар, що мають різні співвідношення пружності та інтенсивності зношування.

Ключові слова: контактна взаємодія, пружна півплощина, штампи канонічної форми, сингулярні інтегральні рівняння, контактний тиск, еліптичні інтеграли, узагальнена проблема на власні значення, зношування матеріалу, поліноми Чебишова, покриття Вінклера, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння.

Анотація. Сачук Ю.В. Плоские контактные задачи и износ упругой полуплоскости с покрытием штампами канонической формы. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2017.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач о контактном взаимодействии жестких штампов канонической формы (параболическая, цилиндрическая, эллиптическая, гиперболическая) с упругой полуплоскостью для определения контактного давления и напряженно-деформированного состояния в полуплоскости, исследованию задач о контактном взаимодействии штампов с упругой полуплоскостью с учетом износа материала, в том числе с полуплоскостью, которая защищена тонким упругим слоем.

Для плоской контактной задачи получено аналитическое решение сингулярного интегрального уравнения для определения контактного давления, которое для цилиндрического, гиперболического и эллиптического штампов выражается через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода. Рассмотрены основные методы вычисления эллиптических интегралов третьего рода во всем диапазоне входных параметров. Разработаны и налажены схемы для расчета компонент напряжений, определены зоны текучести материала в полуплоскости.

Для контактной задачи с износом получено сингулярное интегро-дифференциальное уравнение для определения контактного давления. Развит метод разделения переменных для решения этого уравнения, который сводит задачу к обобщенной проблеме на собственные значения. Исследованы

особенности применения основных методов для поиска приближенных собственных значений. Построены схемы вычислений и программные модули для решения полученной задачи, определено оптимальное количество собственных значений для достоверности результатов. Исследованы особенности износа полуплоскости каноническими штампами за разных кривизн штампов в разные временные моменты, обнаружено особенности взаимодействия таких тел, а также определены точки взаимодействия и условия, которые приводят к критическому износу.

Для контактной задачи об износе тонкого упругого покрытия Винклера построена математическая модель задачи и развит метод решения с использованием полиномов Чебышева. Описан алгоритм поиска решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения для контактного давления, который приводит задачу к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Решенная задача позволяет определить контактное давление в любой точке области контакта и оценить параметры износа. Исследованы особенности износа покрытия каноническими штампами для различных контактных пар, имеющих различные соотношения упругости, интенсивности износа.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, упругая полуплоскость, штампы канонической формы, сингулярные интегральные уравнения, контактное давление, эллиптические интегралы, обобщенная проблема на собственные значения, износ материала, полиномы Чебышева, покрытие Винклера, сингулярные интегро-дифференциальные уравнения.

Abstract. Sachuk Y.V. Flat contact problems and the wear of an elastic half-plane with a canonical shape. - Manuscript.

The thesis presented for Degree of the Candidate in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 - Mechanics of Deformable Solids. - Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2017.

The dissertation is devoted to research of the problems of the contact interaction of hard dies of a canonical form (parabolic, cylindrical, elliptic, hyperbolic) with an elastic half-plane for determining the contact pressure and stress-strain state in an elastic half-plane, studying the problems of contact interaction of dies with an elastic half-plane, taking into account the wear of the material, including a half-plane, which is protected by a thin elastic layer.

For a plane contact problem, an analytic solution of a singular integral equation for all forms of stamps is obtained, however, for cylindrical, hyperbolic and elliptic stamps, it is expressed in terms of complete elliptic integrals of the first and third kinds. An algorithm was developed and schemes for calculation of contact pressure and stress components were determined, yield strengths were determined.

For a contact problem with wear of a half-plane, a singular integro-differential equation for determining the contact pressure is constructed. The developed method of separating variables for solving an integral equation, which reduces the problem to a

generalized problem on its own values. The peculiarities of application of basic methods for finding approximate eigenvalues are investigated. The circuit of calculations and program modules for solving a generalized problem on their own values are constructed, the optimal number of eigenvalues for the reliability of the results is determined. The features of wear of the half-plane with canonical stamps for different curvature of stamps at different time points were investigated, and special effects of interaction of bodies were revealed.

For a contact problem on Winkler's thin elastic layer wearing, a mathematical model of the problem was constructed and a method for solving using the Chebyshev polynomials was developed. A step-by-step algorithm for solving an integro-differential equation for contact pressure is developed, which reduces the problem to the solution of a system of linear algebraic equations. The features of coating wear with canonical stamps for various contact pairs with different ratios of elasticity and wear intensity are investigated.

Key words: contact interaction, elastic half-plane, shapes of canonical form, singular integral equations, contact pressure, elliptic integrals, generalized problem on own values, wear material, Chebyshev polynomials, coating Winkler, singular integro-differential equations.

Підписано до друку 12.10.2017 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк на різнографі. Обсяг 0,9 ум. друк. арк. 0,9 обл.-вид. арк.
Наклад 100 пр. Зам. 142. Видавець і виготовлювач – Вежа-Друк
(м. Луцьк, вул. Винниченка, 14, тел. (0332) 29-90-65).
Свідоцтво Держ. комітету телебачення та радіомовлення України
ДК № 4607 від 30.08.2013 р.