**УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ЛУЦЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ
КОМУНАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ЛУЦЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ**

**Наталія Нарихнюк
Віктор Корнелюк**

Інструктивно-методичні матеріали практичних занять ОК 11 Теорія ймовірностей та математична статистика

Змістовний модуль І

Луцьк – 2026

УДК 519.2(076.5) (075.8)
Н 28

Рекомендовано до друку методичною радою
Луцького педагогічного фахового коледжу
Комунального закладу вищої освіти «Луцький педагогічний інститут»
Волинської обласної ради
(протокол № 6 від 20.01.2026)

Рецензенти:
Мартинюк О. С. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій Волинського національного університету імені Лесі Українки
Сидорчук С. В. – викладач циклової комісії природничо - математичних дисциплін Комунального закладу вищої освіти «Луцький педагогічний інститут» Волинської обласної ради.

Нарихнюк Н.Ю., Корнелюк В.О.

Інструктивно-методичні матеріали практичних занять ОК 11 Теорія ймовірностей та математична статистика (Змістовний модуль І): метод розробка/ упоряд. Н. Ю. Нарихнюк, В. О. Корнелюк. Луцьк: Комунальний заклад вищої освіти «Луцький педагогічний інститут» Волинської обласної ради, 2026. 67с.

Методична розробка «Інструктивно-методичні матеріали практичних занять ОК 11 Теорія ймовірностей та математична статистика (Змістовний модуль І)» призначена для студентів педагогічного фахового коледжу КЗВО «Луцький педагогічний інститут» ВОР спеціальності «Комп’ютерні науки». У матеріалах подано структуровані інструкції та методичні рекомендації щодо виконання практичних завдань, спрямованих на формування у студентів навичок застосування теоретичних положень ймовірностей та статистики до реальних задач інформатики. Особливу увагу приділено розвитку аналітичного мислення, умінню працювати з даними, здійснювати їх узагальнення та інтерпретацію результатів.

Розробка забезпечує поетапне засвоєння навчального матеріалу, містить приклади розрахунків, алгоритми виконання завдань та критерії оцінювання завдань для самоперевірки. Використання цих матеріалів сприяє підвищенню ефективності навчального процесу, формуванню професійних компетентностей майбутніх фахівців з комп’ютерних наук, а також розвитку навичок самостійної роботи та практичного застосування статистичних методів у сфері інформаційних технологій.

ПЕРЕДМОВА

Сучасна підготовка фахівців у галузі комп'ютерних наук потребує ґрунтовних знань з математичних дисциплін, зокрема теорії ймовірностей та математичної статистики, які є теоретичною основою для аналізу даних, моделювання процесів, розробки алгоритмів, машинного навчання та прийняття рішень в умовах невизначеності. У зв'язку з цим важливого значення набуває якісна організація практичної складової освітнього процесу, спрямованої на формування в студентів умінь застосовувати теоретичні знання на практиці.

Методична розробка **«Інструктивно-методичні матеріали практичних занять ОК 11 "Теорія ймовірностей та математична статистика" (Змістовний модуль І)»** призначена для студентів педагогічного фахового коледжу КЗВО «Луцький педагогічний інститут» Волинської обласної ради, які навчаються за спеціальністю «Комп'ютерні науки». Матеріали розроблені відповідно до освітньо-професійної програми, робочої програми навчальної дисципліни та сучасних вимог до підготовки фахівців ІТ-галузі.

Змістовний модуль І охоплює базові поняття та методи теорії ймовірностей і включає 6 практичних занять, спрямованих на формування у студентів розуміння сутності випадкових явищ, уміння обчислювати ймовірності подій, аналізувати випадкові величини та їх числові характеристики. Тематика практичних занять охоплює такі розділи:

- випадкові події та означення ймовірності;
- основні теореми теорії ймовірностей;
- повторні випробування;
- випадкові величини;
- числові характеристики випадкових величин.

Загальний обсяг практичних занять Змістовного модуля І становить відповідну кількість годин згідно з навчальним планом і забезпечує поступове ускладнення завдань, логічну послідовність вивчення матеріалу та міжпредметні зв'язки з іншими дисциплінами професійної підготовки.

Кожне практичне заняття містить чітко сформульовану мету, короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, індивідуальні завдання для студентів, а також критерії оцінювання, що дозволяють здійснювати об'єктивний і прозорий контроль навчальних досягнень. Максимальна кількість балів за одне практичне завдання становить 10 балів, що відповідає вимогам кредитно-модульної системи оцінювання.

Запропоновані інструктивно-методичні матеріали можуть бути використані викладачами під час проведення практичних занять, організації самостійної роботи студентів, а також студентами для самопідготовки та систематизації знань. Методична розробка сприяє підвищенню ефективності навчального процесу, розвитку логічного мислення, аналітичних умінь та професійних компетентностей майбутніх фахівців у сфері комп'ютерних наук.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Тема 1. Випадкові події. Означення ймовірності подій.

Мета заняття: розвинути практичні навички розв'язування завдань із ймовірностей у реальних та абстрактних сценаріях, пов'язаних із комп'ютерними науками, математикою та повсюдним життям. Підготувати студентів до розв'язання задач прикладного характеру, які можуть виникати в інформаційних технологіях, інженерії та аналізі даних.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)
   - Розв’язання задач.
   - Самостійна робота студентів.
   - Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.
5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- Пригадайте, що називають **дослідом (випробуванням)**. Наведіть приклади дослідів, результат яких неможливо передбачити наперед (підкидання монети, кидання грального кубика тощо).
- Які події називають **випадковими**, **достовірними** та **неможливими**? Спробуйте навести власні приклади кожного виду подій.
- Згадайте, що таке **множина можливих результатів досліду**. Як її можна описати для простих експериментів?
- Що таке **сприятливі наслідки події**? Як вони пов’язані з усіма можливими результатами досліду?
- Пригадайте, які події називають **рівноймовірними**. У яких випадках можна вважати результати досліду рівноймовірними?

3. Теоретична частина

1. Випадкові події

Випадковою подією називають результат експерименту або явища, яке за певних умов може або відбутися, або не відбутися.

Класифікація подій:

1. **Достовірна подія** — це подія, яка обов'язково відбудеться за будь-якими умовами (наприклад, після підкидання монети вона впадає на зі сторінку).
2. **Неможлива подія** — це подія, яка за даних умов ніколи не може статися (наприклад, витягнути червову карту з колоди, у якій немає червових карт).
3. **Випадкова подія** — це подія, яка може як відбутися, так і не відбутися за дані умови (наприклад, при підкиданні монети випаде "орел").

2. Означення ймовірності подій

Ймовірність події — це числова міра можливості ступеня настання цієї події. Існує декілька підходів до визначення ймовірності:

1. **Класичне визначення ймовірності:**

Якщо подія *A* складається з *m* частинних випадків, що входять до складу повної групи з *n* попарно несумісних і рівноможливих випадків, то ймовірність *P(A)* події *A* дорівнює

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n},$$

тобто ймовірність *P(A)* події *A* дорівнює відношенню числа результатів випробувань, сприятливих події *A,* до числа всіх можливих результатів випробувань.

2. **Статистичне визначення ймовірності**

Відносна частота, поряд з ймовірністю, належить до основних понять теорії ймовірностей. Якщо позначити через μ – число появ події в n – незалежних випробуваннях, то відношення числа появ події до загального числа проведених випробувань називають **відносною частотою появи даної події**, тобто

$$W = \frac{\mu}{n}, \qquad (1.2)$$

де μ – число появ події, n – загальне число випробувань, W – відносна частота.

Наприклад, якщо зі 100 зіграних матчів команда зіграла 62, то ймовірність перемоги в наступному матчі P(перемога)=62/100=0,62.

3. **Геометричне визначення ймовірності**

Використовується, коли подія пов'язана з геометричними величинами (довжина, площа, об'єм). Формула:

Ймовірність випадкової події A дорівнює

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \qquad (1.3)$$

де $m(A)$– довжина, площа чи об’єм підмножини A; $m(\Omega)$– довжина, площа чи об’єм області Ω.

Наприклад, ймовірність того, що випадкова точка потрапила в кола радіус r, вписане у квадратну сторону 2r, дорівнює $P=\pi r^2/(2r)^2=\pi/4P$

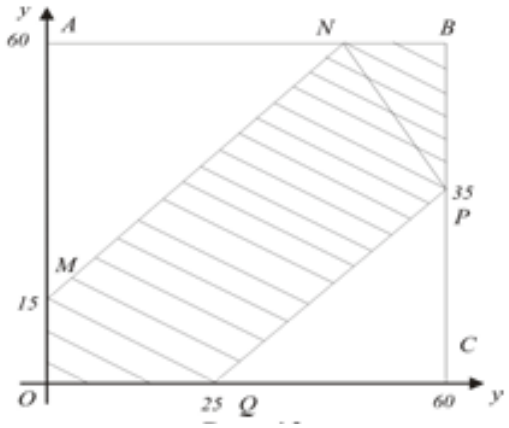
Приклад. На причалі очікується прибуття двох теплоходів з 10-ї до 11-ї години. Визначити ймовірність того що одному з теплоходів доведеться чекати іншого, якщо час стоянки першого теплохода – 15 хвилин, а другого – 25 хв.

Розв’язання. Позначимо x та y – час прибуття (у хвилинах) першого та другого теплоходів до причалу відповідно: $0 \le x \le 60; 0 \le y \le 60$ (так як вони прибувають протягом години). Отже, простір елементарних подій G – точки квадрата OABC, рис.1. Нехай подія A– один з катерів буде чекати іншого. Оскільки простір G є неперервним то ймовірність P(A) можна обчислити за геометричним означенням, тобто $\mathrm{P(A)} = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Визначимо відповідну для події A множину точок площини G. В залежності від порядку приходу теплоходів може бути два випадки. Перший теплохід чекатиме другого, якщо він підійде до причалу протягом 25 хвилин після прибуття другого, тобто $x - y \le 25$. Аналогічно для другого випадку $y - x \le 15$. Отже, множина точок площини, що задовольняє систему нерівністей

$$\begin{cases} x - y \le 25 \\ y - x \le 15 \\ 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{cases}$$

визначає шестикутник *OMNPQ*.



$$S_{OABC} = 60^2, \quad S_1 = S_{OMNBPQ} = S - (S_{MAN} + S_{PCQ});$$

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} AM^2 = \frac{1}{2} \cdot 45^2 = 1012,5,$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2} CQ^2 = \frac{1}{2} \cdot 35^2 = 612,5,$$

$$P(A) = \frac{3600 - (1012,5 + 612,5)}{3600} = \frac{1975}{3600} \approx 0,55.$$

Отже, ймовірність того, що одному з теплоходів прийдеться очікувати іншого дорівнює 0,55.

Відповідь: 0,55.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Класифікація подій *(4 б.)*

Розгляньте наступні події, наведені нижче. Вкажіть, які з подій є:

- достовірними,
- неможливими,
- випадковими.

1. Програма на Python виконується без помилок, якщо її код правильно написаний.
2. На комп'ютері із системою Windows 10 буде запущено додаток, призначений лише для macOS.
3. У випадковий момент часу сервер видаляє помилку 404 під час спроби завантажити веб-сторінку.
4. На вашій клавіатурі є кнопка Enter.

Завдання 2. Класичне визначення ймовірності *(3 б.)*

При киданні грального кубика обчисліть ймовірність наступних подій:

1. Випаде число 4.
2. Випаде парне число.
3. Випаде число більше 5.

Завдання 3. Геометричний підхід до визначення ймовірності *(2 б.)*

Є квадрат зі стороною 10 см. У ньому накреслено коло радіусом 5 см. Якщо випадкова точка пропускається в середину квадрата, знайдіть ймовірність того, що вона також потрапила в середину кола.

Завдання 4. Задачі з колодою карт*(2 б.)*

1. З колоди у 36 карток навмання витягується одна карта. Яка ймовірність, що це буде туз?
2. З тієї ж колоди витягується одна карта. Яка ймовірність, що це буде червова карта?

Завдання 5. Комплексні події *(3 б.)*

При підкиданні двох гральних кубиків оцініть ймовірність:

1. Сума чисел, що випали дорівнює 7.
2. На обох кубиках випаде однакове число.
3. Сума чисел, що випали перевищує 9.

Завдання 6. Практичне застосування *(2 б.)*

На виробництві перевіряється якість продукції. У партії зі 100 деталей 10 є бракованими. Випадково обирається одна деталь. Знайдіть ймовірність, що:

1. Обрана деталь якісна.
2. Обрана деталь бракована.

Завдання 7 (Сумісні та несумісні події) *(3 б.)*

На сервері обробляються три типи запитів:

- **A** : запити до бази даних,
- **B** : запити до файлової системи,
- **C** : запити до API зовнішнього сервісу.

Відомо, що:

1. Із 100 запитів, у середньому 40 стосуються бази даних.
2. Із 100 запитів, у середньому 50 стосуються файлової системи.
3. Із 100 запитів 10 стосуються одночасно і бази даних, і файлової системи.
4. Із 100 запитів у середньому 30 стосуються API зовнішнього сервісу, і такі запити ніколи не перетинаються із запитами до файлової системи.

Завдання:

1. Чи можете одночасно відбуватися запити до баз даних та файлової системи? Якщо так, введіть приклад і поясніть.
2. Скільки запитів із 100 стосуються або бази даних, або файлової системи, або обох одночасно?
3. Скільки запитів із 100 стосуються або файлової системи, або API зовнішнього сервісу, або обох?

Завдання 8. Обернена задача *(3 б.)*

У класі 30 студентів. З них 18 грають у футбол, 12 — у волейбол, а 5 займаються обома видами спорту. Випадково обирається студент. Знайдіть ймовірність, що:

1. Студент займається лише футболом.
2. Студент займається спортом хоча б одним із видів.
3. Студент не займається спортом.

Завдання 9. Статистичне визначення ймовірності *(2 б.)*

На спортивному турнірі протягом 100 матчів команда зіграла 62 рази, програла 30 разів і 8 матчів завершилися в нічию.

1. Визначте ймовірність кожного з трьох результатів (перемога, поразка, нічия) для майбутнього матчу.
2. Якщо в майбутньому сезоні команда зіграє 50 матчів, скільки з них, відповідно до статистичних показників ймовірності, можна очікувати з перемогою?

Завдання 10. *(6 б.)*У групі з 30 студентів комп'ютерних наук є такі спеціалізації: 10 студентів спеціалізуються на програмуванні, 8 студентів – на кібербезпеці, 7 студентів – на штучному інтелекті, а решта 5 – на аналізі даних. Відомо, що 3 студенти мають подвійну спеціалізацію: програмування і кібербезпека, 2 студенти спеціалізуються на кібербезпеці і штучному інтелекті, 2 студенти - на програмуванні і аналізі даних, а 1 студент - на штучному інтелекті і аналізі даних.

1. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент спеціалізується на програмуванні.
2. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент не спеціалізується на програмуванні.
3. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент спеціалізується або на кібербезпеці, або на штучному інтелекті.
4. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент спеціалізується одночасно і на програмуванні, і на аналізі даних.
5. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент спеціалізується або на кібербезпеці, або на аналізі даних, або на штучному інтелекті.
6. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент спеціалізується на кібербезпеці, але не на штучному інтелекті.

Критерії оцінювання практичного заняття

Тема: Випадкові події. Означення ймовірності подій

Максимальна кількість балів: 30

№ завдання	Назва завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Макс. бал
1	Класифікація подій	Розуміння видів подій	4 б. – правильно класифіковано всі події;3 б. – допущена 1 помилка;2 б. –	4

№ завдання	Назва завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Макс. бал
			правильно класифіковано 2 події;1 б. – правильно класифікована 1 подія;0 б. – неправильні відповіді	
2	Класичне визначення ймовірності	Застосування класичної формули	3 б. – правильно розв’язані всі підпункти;2 б. – правильно розв’язані 2 підпункти;1 б. – правильно розв’язаний 1 підпункт;0 б. – неправильні обчислення	3
3	Геометричне визначення ймовірності	Геометричний підхід	2 б. – правильний розв’язок із поясненням;1 б. – правильна формула, але обчислювальна помилка;0 б. – неправильний підхід	2
4	Задачі з колодою карт	Обчислення ймовірності	2 б. – правильно виконані обидва підпункти;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильні відповіді	2
5	Комплексні події (два кубики)	Аналіз складних подій	3 б. – правильно виконані всі підпункти;2 б. – правильно виконані 2 підпункти;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильні відповіді	3
6	Практичне застосування	Ймовірність у прикладних задачах	2 б. – правильно виконані обидва підпункти;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильні обчислення	2
7	Сумісні та несумісні події	Об’єднання та перетин подій	3 б. – всі підпункти виконані правильно;2 б. – допущена 1 помилка;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильний підхід	3
8	Обернена задача	Формула включення–виключення	3 б. – правильно виконані всі підпункти;2 б. – правильно виконані 2 підпункти;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильні відповіді	3
9	Статистичне визначення ймовірності	Аналіз статистичних даних	2 б. – правильно виконані обидва підпункти;1 б. – правильно виконаний 1	2

№ завдання	Назва завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Макс. бал
			підпункт;0 б. – неправильні відповіді	
10	Ймовірність у множинах (складна задача)	Комплексний аналіз множин	6 б. – правильно виконані всі підпункти;5–4 б. – правильно виконані 4–5 підпунктів;3–2 б. – правильно виконані 2–3 підпункти;1 б. – правильно виконаний 1 підпункт;0 б. – неправильний підхід	6

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

За всі завдання в сумарній кількості ви можете набрати від $0 \leq \mathbf{S} \leq 30$ балів. Тому кількість балів, що ви набрали за практичне заняття – **S/3.**

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Тема 1. Випадкові події. Означення ймовірності подій.

Мета заняття: закріпити знання студентів щодо основ комбінаторики, навчитися використовувати ці знання для обчислення ймовірностей, а також розвивати вміння аналізувати й розв’язувати задачі різного рівня складності.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)

- Розв’язання задач.
- Самостійна робота студентів.
- Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.

5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.

5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- **Дослід (випробування)**
  Що таке експеримент, результат якого неможливо передбачити наперед?
  Приклади: підкидання монети, кидання кубика, вибір карти з колоди.
- **Види подій**
  Достовірна подія – подія, яка обов’язково відбудеться.
  Неможлива подія – подія, яка не може відбутися.
  Випадкова подія – подія, яка може відбутися або не відбутися в результаті досліду.
- **Простір елементарних подій**
  Множина всіх можливих результатів експерименту.
  Як його визначити для різних випадків (монета, кубик, колода карт)?
- **Сприятливі випадки події**
  Підрахунок сприятливих результатів і їх співвідношення до всіх можливих результатів.
- **Рівноймовірні події**
  Коли результати експерименту можна вважати рівноймовірними?
  Чому це важливо для класичного визначення ймовірності?
- **Формула класичної ймовірності**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

  де m– кількість сприятливих результатів, n– кількість всіх можливих результатів.
- **Застосування знань на практиці**
  Як обчислювати ймовірність простих і складних подій?

Приклади з реального життя: якість продукції, результати спортивних матчів, випадкові події в ІТ.

3. Теоретична частина

1. Елементи комбінаторики та їх застосування під час обчислення ймовірностей

Для підрахунку кількості всіх можливих випадків n і числа сприятливих випадків m часто використовують різні комбінаторні співвідношення.

Комбінаторика – це розділ математики, що займається підрахунком числа різного типу комбінацій (вибірок), складених з елементів скінченної множини за певними правилами.

При розв'язуванні комбінаторних задач використовують наступні два аксіоматичні правила.

Правило суми. *Якщо об'єкт* ***a*** *можна вибрати* ***k*** *способами, а об'єкт* ***b*** *– іншими* ***m*** *способами (незалежно від вибору a), то вибір об'єкта " a або b " може бути здійснений* ***k + m*** *способами*.

Тут зв'язка ***або*** вживається в розділовому сенсі.

Правило добутку. *Якщо об'єкт* ***a*** *можна вибрати* ***k*** *способами, а після кожного з цих виборів об'єкт* ***b*** *– іншими* ***m*** *способами (незалежно від вибору a), то вибір упорядкованої пари* (a,b) *може бути здійснений* $\boldsymbol{k \cdot m}$ *способами*.

Нехай $M = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ – деяка скінченна множина з n елементів. Розглянемо основні типи комбінацій – перестановки, розміщення та сполучення.

1. Комбінації з n елементів, які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, називаються ***перестановками***.

Кількість таких перестановок позначають символом P_n , де n – число елементів, що входять у кожну перестановку.

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n - ***факторіалом*** і пишуть: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$.

Вважають, що $0!=1$ і $1!=1$. Основна властивість факторіала:

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!.$$

Число перестановок обчислюють за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n \qquad (1.1)$$

2. Розміщення. Множина, в якій задано порядок розміщення її елементів, називається **впорядкованою**. Нехай задано скінченну множину, яка

складається з n елементів. Усяка її упорядкована k-елементна підмножина ($k < n$) називається **розміщенням** з n елементів по k.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k. Це число знаходять за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1.2)$$

Розміщення й перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

3. Сполучення. Нехай дано скінченну множину, яка складається з n елементів. Усяка її k-елементна підмножина ($k < n$) називається **сполученням** з n елементів по k.

Число сполучень з n елементів по k позначають C_n^k. Це число знаходиться за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1.3)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Скільки тризначних чисел можна скласти із 10 карток, на яких написані цифри від 0 до 9?

Розв'язання. Відзначимо перш за все, що цифри в представленні чисел повторюватись не можуть (тому що є лише 10 карток із різними цифрами), крім того, перша цифра не може бути 0. Таким чином, усі тризначні числа є упорядкованими підмножинами, що складаються з трьох елементів множини цифр {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, тобто розміщеннями із 10 по 3, з яких вилучено всі ті, які починаються нулем.

Кількість усіх розміщень із 10 по 3 знайдемо, користуючись (1.2)

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Кількість розміщень із 10 по 3, у яких на першому місці стоїть 0, рівна кількості розміщень із 9 (без цифри 0) по 2.

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72$$

Отже, шукана кількість тризначних чисел $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648$.

Відповідь: 648.

Задача 2.2. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

Розв'язання. Кількість таких способів дорівнює числу розміщень з 8 предметів по 3: $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Відповідь: 336.

Задача 2.3. Команда з "Клубу знавців" у складі 6 осіб займає місця за круглим столом. Скільки існує можливих варіантів розміщення гравців?

Скільки таких варіантів у випадку, коли два відібрані гравці команди повинні сісти поруч?

Розв'язання. У першому випадку кількість варіантів розміщення гравців дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $P_6=6!=720$. У другому випадку для двох виділених осіб є 6 різних сусідніх пар місць, на кожному з яких ці дві особи можуть сісти двома способами. Отже, посадити їх поруч можна 12 способами. На місця, що залишились, решту можна розсадити $P_4=4!$ способами. За правилом добутку дістаємо кількість усіх варіантів розміщень:$12\cdot 4! = 288$.

Відповідь: 288.

Задача 2.4. Скільки потрібно купити карток лотереї "Спортлото 5 із 36", щоб напевне вгадати усі 5 номерів майбутнього тиражу? Скільки грошей на це треба витратити, якщо одна картка коштує 2 грн.?

Розв'язання. Варіанти заповнень карток лотереї є неупорядкованими (порядок слідування вгаданих номерів ролі не грає) підмножинами по 5 елементів із множини 36 елементів, тобто є комбінаціями із 36 по 5. Щоб напевне вгадати усі 5 номерів лотереї, потрібно перебрати усі можливі комбінації із 36 по 5 і заповнити відповідні картки. Таких комбінацій, а отже, і карток, буде

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{(36-5)!5!} = \frac{36!}{31!5!} = \frac{32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376992$$

Для придбання такої кількості карток потрібно $376992\times 2 = 753984$ грн.

Відповідь: 376992 картки , 753984 грн.

Задача 2.5. Розв'язати рівняння $A_7^x = x\cdot A_7^{x-1}$

Розв'язання. Оскільки $A_7^x = \frac{7!}{(7-x)!}$;

$A_7^{x-1} = \frac{7!}{(7-(x-1))!} = \frac{7!}{(8-x)!}$, то рівняння запишеться у вигляді

$\frac{7!}{(7-x)!} = \frac{x\cdot 7!}{(8-x)!}$, або $7!(8-x)! = x\cdot 7!(7-x)!$;

$(8-x)! = x(7-x)!$; $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(7-x)\cdot(8-x) = x\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(7-x)$;

$8-x=x$; $2x=8$; $x=4$.

Відповідь: x=4.

Задача 2.6. Компанія розробляє програму, яка перевіряє надійність паролів. Користувач повинен створити пароль із такими умовами:

1. Пароль має складатися з 5 **символів** , обраних із набору з **10 цифр** (від 0 до 9).
2. Пароль повинен включати **рівно 2 однакові цифри** , а решта 3 символи повинні бути різними.

Запитання: Яка кількість можливих паролів відповідає цим умовам?

Розв'язання.

Кількість можливих паролів, які відповідають умовам:

- Пароль має складатися з 5 символів, обраних із набору з 10 цифр (від 0 до 9).
- Пароль повинен включати рівно 2 однакові цифри, а решта 3 символи повинні бути різними.

Кількість способів вибрати дві однакові цифри:

Ми маємо 10 цифр, з яких ми можемо вибрати будь-яку одну для дублювання. Тобто, це 10 способів.

Кількість способів вибрати три різні цифри з решти 9:

Після того, як ми вибрали одну цифру для дублювання, у нас залишаються 9 цифр, з яких ми можемо вибрати 3 різні цифри. Кількість способів вибрати 3 різні цифри з 9 можна обчислити за допомогою біноміального коефіцієнта:

$$C(9,3) = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$$

Кількість способів розташувати ці цифри в паролі:

Ми маємо 5 місць, з яких 2 місця займуть однакові цифри, а інші 3 — різні. Кількість різних перестановок із двома однаковими цифрами дорівнює:

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

Отже, загальна кількість можливих паролів:

$$10 \times 84 \times 60 = 50400$$

Задача 2.7. В урні міститься 10 кульок, серед них 4 сині і 6 червоних. Із урни навмання беруть 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед вибраних кульок є 2 сині та 3 червоні.

Задача 2.8. Студент знає відповіді до 45 із 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить 2 питання. Яка ймовірність того, що студент відповість на обидва питання?

Задача 2.9. Заступник директора школи складає розклад уроків для 10-го класу. Він запланував на понеділок шість уроків з таких предметів: геометрія, біологія, англійська мова, хімія, фізична культура, географія. Скільки всього існує різних варіантів розкладу уроків на цей день, якщо урок фізичної культури має бути останнім у розкладі?

Задача 2.10. Скільки всього існує різних двоцифрових чисел, у яких перша цифра є парною, а друга – непарною?

Задача 2.11. Марійка зірвала на клумбі 9 нарцисів та 4 тюльпани. Скільки всього існує способів вибору із цих квітів 3 нарцисів та 2 тюльпанів для букета?

Завдання для самостійного виконання

Кожне завдання оцінюється в 1 бал

1. Скільки існує різних способів розташування літер у слові "КОМП'ЮТЕР"?

а) 10!

б) 9!

в) 8!

г) 7!

2. Скільки способів існує для вибору двох карт із колоди в 36 карт?

а) C_{36}^{2}

б) 36^{2}

в) 36!

г) 2×36!

3. Яка ймовірність випадково вибрати просте число з множини {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}?

а) $\frac{3}{10}$;

б) $\frac{4}{10}$;

в) $\frac{5}{10}$;

г) $\frac{7}{10}$.

4. Обчисліть ймовірність, що серед трьох випадково вибраних куль з урни, в яких є 5 червоних і 7 синіх куль, будуть тільки червоні кулі. *Відповідь повинна містити детальний розв'язок.*

5. Розв'язати рівняння:

$$A_n^5 = 20A_{n-1}^4$$

6. Скільки існує способів зібрати комітет із 4 осіб із групи, в складі якої є 10 чоловіків і 5 жінок так, щоб у комітеті було не менше 2 жінки?

7. У класі є 12 студентів, із яких 4 мають диплом бакалавра. Яка ймовірність, що серед 5 випадково обраних студентів опиняться щонайменше 2 з дипломом бакалавра?

8. Пароль, що складається з 6 символів, використовують тільки цифри (0-9). Скільки різних паролів можна створити, якщо в паролі не повинно бути двох однакових цифр? Яка ймовірність, що випадково створений пароль задовольняє цю умову?

9. Компанія розробляє програму, яка перевіряє надійність паролів. Користувач повинен створити пароль із такими умовами:

3. Пароль має складатися з **6 символів** , обраних із набору з **10 цифр** (від 0 до 9).

4. Пароль повинен включати **рівно 2 однакові цифри** , а решта 4 символи повинні бути різними.

Запитання:

1. Яка кількість можливих паролів відповідає цим умовам?
2. Якщо всі паролі довжиною 6 символів із набору цифр рівновірогідні, знайдіть ймовірність того, що випадково створений пароль відповідає цим умовам.

Критерії оцінювання практичного заняття
Тема: Випадкові події. Означення ймовірності подій
Максимальна кількість балів: 10

№	Завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Макс. бал
	Скільки існує різних способів розташування літер у слові "КОМП'ЮТЕР"?	Розуміння перестановок	1 б. – правильна відповідь; 0 б. – неправильна відповідь	1
	Скільки способів існує для вибору двох карт із колоди в 36 карт?	Використання формули комбінацій	1 б. – правильна відповідь ; 0 б. – неправильна відповідь	1
	Ймовірність випадково вибрати просте число з множини {1,…,10}	Розрахунок ймовірності	1 б. – правильна відповідь ; 0 б. – неправильна відповідь	1
	Ймовірність, що серед трьох випадково вибраних куль будуть тільки червоні	Розуміння класичної ймовірності, повний розрахунок	1 б. – правильний результат із детальним розв’язком;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильне розв’язання	1
	Розв’язати рівняння	Коректність обчислень	1 б. – правильне рішення рівняння;0 б. – неправильний розв’язок	1
	Комітет із 4 осіб із 10 чоловіків і 5 жінок, ≥2 жінки	Правильне застосування комбінацій та логічний підхід	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильне рішення	1
	Ймовірність обрати ≥2 бакалаврів серед 5 студентів	Використання ймовірності для комбінованих подій	1 б. – правильний розрахунок із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильне рішення	1
	Пароль із 6 різних цифр	Застосування принципів перестановок і ймовірності	1 б. – правильна кількість паролів і ймовірність;0,5 б. – частково правильно;0 б. – неправильне рішення	1

№	Завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Макс. бал
	Пароль із 6 символів, рівно 2 однакові цифри	Комбінаторний підхід та ймовірність	1 б. – правильна кількість можливих паролів і ймовірність;0,5 б. – частково правильно;0 б. – неправильне рішення	1
0	**Підсумкова оцінка**	**Комплексна правильність та оформлення розв'язків**	**Враховується правильність усіх завдань, логічність міркувань і детальність розв'язків**	**10 (сума всіх завдань)**

Пояснення

- Кожне завдання оцінюється 1 балом, за винятком завдань із розв'язком із поясненням, де можливе часткове оцінювання – 0,5 б..
- Максимальна сума балів: 10.
- Важливе оформлення розв'язку – особливо для завдань 4, 6, 7, 8, 9.

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей

Мета заняття: закріпити знання про основні теореми теорії ймовірностей, зокрема теорему додавання ймовірностей, теорему множення ймовірностей та формулу повної ймовірності. Розвинути навички застосування теорем на практиці для розв'язання задач різного типу. Навчитися аналізувати умови задач, визначати необхідні методи розрахунку ймовірностей, використовувати комбінаторні методи.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)
   - Розв'язання задач.
   - Самостійна робота студентів.
   - Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.
5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.

2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- Запитання для обговорення:
    1. Що таке ймовірність?
    2. Що означають події взаємовиключні та незалежні?
- Коротке повторення основних понять, необхідних для роботи: класичне визначення ймовірності, властивості ймовірності.

3. Теоретична частина

1. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події.

Якщо при обчисленні ймовірності події A не вказуються ніякі умови, крім комплексу умов, то такі ймовірності називаються **безумовними** і позначаються $P(A)$.

Ймовірність настання події A, обчислена в припущені, що подія B уже відбулася, називається **умовною ймовірністю** події A при умові B і позначається

$$P(A/B) \text{ або } P_B(A) .$$

Приклад 3.2. В урні 10 куль, з яких 7 білих. По черзі дістаємо 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві витягнуті кулі є білими.

Розв`язання. Нехай подія А=”перша куля біла” ; $P(A) = \frac{7}{10}$.

Подія В=”друга куля біла”, подія B/A=”друга куля біла, за умови, що перша куля була білою”. Умовна ймовірність $P\left(B/A\right) = \frac{6}{9}$.

Подія АВ=”обидві кулі білі”. $P(AB) = P(A) \cdot P\left(B/A\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$.

Відповідь: $\frac{42}{90}$.

2. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Сумою двох подій *A* + *B* називають подію, що полягає у появі події *A* або події *B*, або обох цих подій.

Теорема 2.1. Ймовірність появи однієї з кількох несумісних подій, не важливо якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (2.1)$$

$$P((\sum_i^n A_i) = P(A_1 + A_2 + .. + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + .. + P(A_n) \quad (2.2)$$

Приклад. Підкидають гральний кубик. Знайти ймовірність того, що випаде або число 2, або число 5.

Розв’язання. Подія *A*: випало число 2. Подія B: випало число 5. Події A і B є **несумісними**, оскільки неможливо, щоб на одному підкиданні випало одночасно два числа.

Кубик має 6 граней, тому ймовірність випадання будь-якої конкретної грані:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}.$$

Обчислення загальної ймовірності

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: ймовірність того, що випаде число 2 або число 5, дорівнює $\frac{1}{3}$.

3.Теорема множення залежних і незалежних подій

Добутком двох подій *A і B* називають таку третю подію *C*, що полягає в одночасній появі цих подій.

Теорема 2.2. Якщо події *A* і *B* незалежні між собою, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.3)$$

Ймовірність появи кількох подій, незалежних сукупно, обчислюється за формулою:

$$P(\prod_i A_i) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) . \quad (2.4)$$

Теорема 2.3. Ймовірність добутку двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї із цих подій на умовну ймовірність другої, обчислену за умови, що відбулась перша подія.

$$\mathrm{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P}_A\mathrm{(B)}. \qquad (2.5)$$

Якщо маємо три події *A, B, C,* залежні між собою, то теорема множення ймовірностей матиме вигляд:

$$\mathrm{P(A \cdot B \cdot}\, C) = \mathrm{P(A) \cdot P}_A\mathrm{(B)} \cdot P_{AB}(C). \qquad (2.6)$$

Оскільки $A \cdot B = B \cdot A$, то і для множення ймовірностей має місце закон комутативності:

$$\mathrm{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P}_A\mathrm{(B)} = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (2.7)$$

Приклад 3.3. Опишемо події: А = "навмання вилучено з колоди карт карту пікової масті", В = "навмання вилучено з колоди карт туз". Ці події сумісні, тому що серед карт пікової масті є туз, а серед тузів – карта пікової масті. Крім того ці події незалежні:

$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 4 тузи). $P(B/A) = \frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті).

$P(\mathrm{A}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{A/B}) = \frac{1}{4}$.

4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Суму двох сумісних подій можна подати у вигляді:

$$\mathrm{A + B = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} + A \cdot B.}$$

Теорема 2.4. Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності добутку цих подій, тобто:

$$\mathrm{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)} \qquad (2.8)$$

Зауваження: при використанні формули (2.8) треба мати на увазі, що події *A* і *B* можуть бути і залежними, і незалежними.

Для сумісних і незалежних подій теорема додавання запишеться формулою:

$$\mathrm{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).} \qquad (2.9)$$

Для сумісних і залежних подій теорема додавання запишеться формулою:

$$\mathrm{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)} \qquad (2.10)$$

Приклад 3.1. У колоді 52 карти. Оголошено козир. Яка ймовірність того, що витягнута навмання карта є козирем або тузом?

Розв'язання. Подія *A*="витягнута карта є козирем", подія *B*="витягнута карта є тузом". Події А та В можуть відбуватися одночасно, отже, є сумісними, $AB \neq \varnothing$. Добуток подій АВ="витягнута карта – козирний туз".

$P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{4}{52}$, $P(AB) = \frac{1}{52}$.

Подія А+В="витягнута карта є козирем або тузом".

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}\approx 0{,}308.$$

Відповідь: 0,308.

5. Протилежні події. Ймовірність протилежної події

Протилежними навивають дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу подій. Подію, протилежну події A (тобто ненастання події A), позначають через $\bar{A}$.

Теорема 2.5. Ймовірність суми протилежних подій дорівнює одиниці, тобто:

$$\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})=1 \qquad (2.11)$$

Приклад. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики, дорівнює P(A)=0,8. Знайти ймовірність того, що студент *не складе іспит*.

Розв'язання. Застосовуємо формулу:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.8=0.2.$$

Відповідь. 0,2 або 20%.

6. Ймовірність появи хоча б однієї події

Нехай в результаті випробовування може з'явитися n подій, причому відомі ймовірності цих подій. Ймовірність того, що з'явиться хоча б одна із цих подій шукається за теоремою.

Теорема 2.6. Ймовірність появи хоча б однієї із подій A_1, A_2, ... A_n незалежних сукупно, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{\mathrm{A}_1}, \overline{\mathrm{A}_2}, \ldots, \overline{\mathrm{A}_n}$.

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot \ldots \cdot q_n. \qquad (2.12)$$

де $q_i=1-p_i$ - ймовірності відповідних протилежних подій.

Зокрема, якщо події A_1, A_2, ... A_n мають однакову ймовірність, рівну p, тобто $P(A_1)=P(A_2)=..=P(A_n)=p$, то ймовірність появи – хоч би однієї із цих подій дорівнює:

$$P(A)=1-q^n\ . \qquad (2.13)$$

Приклад. Два стрілки стріляють по мішені незалежно один від одного. Ймовірність влучення першого стрілка дорівнює P(A)=0.7, а другого стрілка — P(B)=0.8. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.

Розв'язання. Для подій A і B, які є незалежними, ймовірність того, що хоча б одна з них станеться, обчислюється за формулою:

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}),$$

де:

- $P(A)$ — ймовірність події A (перша стрілка влучила),
- $P(B)$ — ймовірність події B (друга стрілка влучила),
- $P(\overline{A})=1-P(A)$ — ймовірність протилежної події до A,
- $P(\overline{B})=1-P(B)$ — ймовірність протилежної події до B.

2. Розрахунок ймовірностей протилежних подій

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3,$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

3. Розрахунок ймовірності їх одночасного невлучення

$$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06.$$

4. Обчислення ймовірності "хоча б однієї події"

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0.06 = 0.94.$$

5. Відповідь

Ймовірність того, що хоча б одна стрілка влучить у мішень, дорівнює $P(A \cup B) = 0.94$ або 94%.

7. Формула повної ймовірності

Нехай подія B може відбутися з однією і лише однією із n-попарно несумісних подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, тобто

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \cdots + A \cdot H_n.$$

Потрібно знайти ймовірність події A. На основі теореми додавання несумісних подій маємо:

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \cdots + P(A \cdot H_n).$$

Далі, використавши теорему множення залежних подій, отримаємо:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \cdots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \qquad (2.14)$$

Формулу (2.14) називають **формулою повної ймовірності**.

Подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, які утворюють повну груп, тобто:

$$P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1. \qquad (2.15)$$

Приклад. На складання надходять деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 20%, другий – 30%, третій – 50% деталей такого типу, які надходять на скла-дання. Перший автомат дає 0,2% браку, другий – 0,3%, третій – 0,1%. Знайти ймовірність того, що на складання надійшла бракована деталь.

Розв'язання:

1. **Позначення:**
   - Подія A: деталь надійшла з першого автомата.
   - Подія B: деталь надійшла з другого автомата.

- Подія C: деталь надійшла з третього автомата.
- Подія D: деталь бракована.

2. **Ймовірності того, що деталь надійшла з кожного автомата:**
   - P(A)=20%=0,2
   - P(B)=30%=0,3
   - P(C)=50%=0,5
3. **Ймовірності того, що деталь бракована, за умови, що вона надійшла з кожного автомата:**
   - P(D|A)=0,2%=0,002
   - P(D|B)=0,3%=0,003
   - P(D|C)=0,1%=0,001
4. **Застосування формули повної ймовірності:**
   - Ймовірність того, що на складання надійшла бракована деталь, дорівнює: P(D)=P(D|A)·P(A)+P(D|B)·P(B)+P(D|C)·P(C)
   - Підставляємо значення: P(D)=0,002·0,2+0,003·0,3+0,001·0,5 P(D)=0,0004+0,0009+0,0005=0,0018

Відповідь: 0,0018

8. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Нехай знову подія A може відбутися з однією і лише однією із n-попарно незалежних подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, тобто:

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \cdots + A \cdot H_n.$$

Події $H_1, H_2, \ldots H_n$, називають **гіпотезами**.

Нехай подія A – відбулася. Треба знайти ймовірність події Hi, із якою відбулася подія A, тобто $P_A(H_i)$. На основі теореми множення ймовірностей, маємо:

$$P(H_i A) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i),$$

звідси:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Використавши формулу повної імовірності (2.14), одержимо:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}. \qquad (2.16)$$

Формулу (2.15) називають **формулою Байєса** (за ім'ям англійського математика, який опублікував в 1764 р. цю формулу) або **формулами гіпотез**.

Задача 1. Два автомата виробляють одинакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась

відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь вироблена першим автоматом.

Розв'язування. Позначимо через A подію – деталь відмінної якості. Можна зробити два припущення (гіпотези): B_1 – деталь вироблена першим автоматом, причому (оскільки перший автомат виробляє вдвічі більше деталей, у порівнянні з другим) $\mathrm{P}(B_1) = \frac{2}{3}$; B_2 – деталь вироблена другим автоматом, $\mathrm{P}(B_2) = \frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що деталь буде відмінної якості, якщо вона вироблена першим автоматом, $P_{B_1}(A) = 0{,}6.$

Умовна ймовірність того, що деталь буде відмінної якості, якщо вона вироблена другим автоматом, $P_{B_2}(A) = 0{,}84.$

Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться відмінної якості, за формулою повної ймовірності дорівнює

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Шукана ймовірність того, що взята деталь відмінної якості вироблена першим автоматом, за формулою Байєса дорівнює

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Відповідь: $\frac{10}{17}$.

Завдання для самостійного виконання

Кожне завдання оцінюється в 1 бал

1. В лотереї випущено 10000 білетів, серед яких 100 білетів з виграшем по 5 тис. грн., 200 – по 1 тис. грн., 500 – по 500грн., та 1000 – 200 грн., а решта без виграшу. Знайти ймовірність виграшу не менше 500 грн., якщо придбали один білет.
2. В ящику 32 деталі, з яких 22 стандартні. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних деталей виявиться хоча б одна стандартна.
3. Підкидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде три очки.
4. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити підкомітет із його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в цьому підкомітеті будуть бухгалтерами?
5. В цеху два ткацькі верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не потребуватиме наладки оператора дорівнює 0,7, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом години жоден з верстатів не потребуватиме наладки оператора.

6. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

7. На заводі перший цех виробляє 10%, другий - 70% третій – 20% всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 9%, 8%, 7%. Випадково вибрана деталь виявилась дефектною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим цехом.

8. Студент прийшов на екзамен, знаючи лише 20 з 25 екзаменаційних питань. Яка ймовірність того, що він знає відповіді на всі три запитання?

9. Два стрільці стріляють по мішені незалежно один від одного по одному разу. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця $p_1 = 0,6$; для другого - $p_2 = 0,8$. В мішені виявлено одне влучення. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

10. Під час сесії студент здає два заліки та чотири іспити. До кожного з заліків студент вивчив 70% питань, а до кожного з іспитів - 80% запропонованих питань. Знайти ймовірність того, що студент складе сесію.

Критерії оцінювання практичного заняття

Тема: Основні теореми теорії ймовірностей

Максимальна кількість балів: 10

№	Завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Бал
1	Лотерея: ймовірність виграшу ≥500 грн	Правильне визначення сприятливих випадків та обчислення ймовірності	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
2	Ймовірність хоча б однієї стандартної деталі серед 5	Використання формули ймовірності «хоча б один»	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
3	Підкидання двох кубиків: хоча б одна трійка	Правильне застосування формули «хоча б одне»	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
4	Підкомітет: усі бухгалтери	Використання комбінацій та логіка	1 б. – правильна ймовірність із поясненням;0,5 б. – результат без пояснень;0 б. – неправильний	1
5	Два незалежні верстати: ймовірність без наладки	Використання формули для незалежних подій	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
6	Ймовірність попадання за один постріл	Використання оберненої ймовірності	1 б. – правильний результат із розрахунком;0,5 б. – правильний результат без обчислень;0 б. – неправильний	1
7	Завод: ймовірність дефектної деталі із	Застосування формули Баєса	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – результат без	1

№	Завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Бал
	другого цеху		пояснення;0 б. – неправильний	
8	Екзамен: ймовірність знання всіх трьох запитань	Використання комбінацій та класичної ймовірності	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
9	Два стрільці: ймовірність, що влучив перший	Використання формули умовної ймовірності	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
10	Сесія: ймовірність складання всіх заліків і іспитів	Використання незалежності подій та правильний розрахунок	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – результат без пояснення;0 б. – неправильний	1

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Тема 3. Повторні випробування

Мета заняття: навчити студентів методології повторних випробувань, їх практичного застосування у вирішенні задач. Забезпечити формування навичок оцінювання ймовірностей подій в умовах повторних експериментів. Розвинути вміння використовувати теоретичні знання для моделювання й аналізу результатів повторних випробувань, зокрема з використанням формул Бернуллі та схеми випробувань з незалежними результатами.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)
   - Розв’язання задач.
   - Самостійна робота студентів.
   - Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.
5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.

5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- Що таке ймовірність? Які є основні властивості ймовірностей?
- Що мається на увазі під незалежними випробуваннями?
- Описати схему Бернуллі та умови її застосування.

3. Теоретична частина

1. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Послідовні випробування називаються незалежними, якщо здійснення будь-якого результату в *n*-му за рахунком випробуванні не залежить від результатів у попередніх випробуваннях.

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тобто поява події A в i-му випробуванні не залежить від її появи в інших випробуваннях, то таку серію випробувань називають **схемою Бернуллі**.

Якщо випадкова подія А відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = p$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що при n випробуваннях за схемою Бернуллі подія А відбудеться k разів визначається за **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (3.1)$$

2. Найімовірніше число настання події під час повторних випробувань

Під час обчислення ймовірностей $P_n(k)$ для різних значень k будуть різні значення імовірності. Число k_0 (появи події в n незалежних випробуваннях) називається **найімовірнішим**, якщо ймовірність $P_n(k_0)$– найбільша.

Для визначення найімовірнішого числа появи використовуємо нерівність:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (3.2)$$

Можливі такі випадки:

1. Якщо $np - q$ – дробове число, то маємо єдине найімовірніше число.
2. Якщо $np - q$ – ціле число, то маємо два найімовірніших числа k_0 і k_0+1.
3. Якщо np – ціле число, то найімовірніше число $k_0 = np$.

3. Локальна теорема Муавра–Лапласа

Локальна теорема Лапласа: якщо ймовірність p настання події A в n незалежних випробуваннях стала і задовольняє нерівність $0 < p < 1$, то ймовірність того, що подія з'явиться k раз в n незалежних випробуваннях, наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (3.3)$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ – є парна, тобто виконується рівність

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Для функції $\varphi(x)$ складені таблиці, в яких за заданими значеннями x знаходять значення функції $\varphi(x)$ (див. – додатки, табл. 1).

4. Інтегральна теорема Лапласа

Якщо ймовірність P настання події A в кожному випробуванні стала ($0 < p < 1$), то ймовірність того, що подія A відбудеться в «n» випробуваннях від k_1 до k_2 разів визначається наближено такою формулою:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x}{2}} dx, \qquad (3.4)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Якщо ввести позначення: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x}{2}} dx$, то формула (3.4) буде мати вигляд:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (3.5)$$

Функцію Ф(х) називають **функцією Лапласа**.

Ф(х) – є не парною функцією, тобто виконується рівність

$$(\Phi(-x) = \Phi(x)\ ).$$

Функція Ф(х) табульована. В таблиці 2 Додатків наведені значення лише до $x = 5$, тому для х > 5 можна вважати, що $\Phi(x) = 0{,}5$.

5. Теорема Пуассона

За теоремою Пуассона вираховують імовірності $P_n(k)$ в тих випадках, коли ймовірність настання події стала і дуже мала, а число випробувань доволі велике.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p настання події A мала, то для великого числа випробувань ймовірність того, що подія відбудеться k раз, асимптотично виражається формулою:

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \qquad (3.10)$$

де $a = np$.

4. Практична частина

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1. Гральний кубик підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що "5" очок випаде а) рівно 2 рази; б) менше 3 разів; в) хоча б один раз.

Розв'язання. Задача відповідає схемі Бернуллі. Відбувається n=6 незалежних випробувань (підкидання грального кубика), в кожному з яких подія А="випало "5" очок" відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю q:

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

а) За формулою Бернуллі (5.1) для m=2 знайдемо:

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{9375}{46656} \approx 0{,}201.$$

б) Подія В="5 очок випало менше двох разів" є сумою подій: "5" очок випало 0, 1 або 2 рази. Тоді ймовірність події В:

$$P(B) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2).$$

За формулою Бернуллі (5.1) для $m=0,1,2$ знайдемо:

$$P_6(0)=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15625}{46656}\approx 0,335;$$

$$P_6(1)=C_6^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{18750}{46656}\approx 0,402;$$

З пп. а) $P_6(2)\approx 0,201$.

Отже, $P(B)\approx 0,335+0,402+0,201=0,938$.

в) Подія С=""5" очок випало хоча б один раз". Розглянемо протилежну подію $\overline{C}$ =""5" очок не випало жодного разу". З пп.б) : $P(\overline{C})=P_6(0)\approx 0,339$.

Отже, $P(C)=1-P(\overline{C})\approx 0,661$.

Відповідь: а) 0,201; б) 0.94; в) 0,661.

Задача 4.2. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг дорівнює 0,02. Знайти найімовірніше число пасажирів, які запізнилися на потяг із 855 пасажирів.

Розв'язання. За умовою $n=855$, $p=0,02$, $q=0,98$. Знайдемо найімовірніше число m^* з нерівності (5.4).

$np-q\le m^*\le np+p$. Отримаємо:

$855\cdot 0,02-0,98\le m^*\le 855\cdot 0,02+0,02$ або $16,12\le m^*\le 17,12$.

Ціле число, що лежить в цих межах, $m^*=17$.

Відповідь: $m^*=17$.

Задача 4.3. Два рівносильних супротивники грають у шахи. Що ймовірніше виграти:

а) одну партію з двох чи дві з чотирьох?

б) не менше двох партій з чотирьох чи не менше трьох з п'яти? Нічийний результат партії не враховуються.

Розв'язання. Оскільки грають рівносильні супротивники, то ймовірність виграшу $p=\frac{1}{2}$ та ймовірність поразки $q=1-p=\frac{1}{2}$. Оскільки в усіх партіях ймовірність виграшу однакова, то можна застосувати формулу Бернуллі (5.1).

а) Знайдемо ймовірність того, що виграно одну партію з двох:

$$P_2(1)=C_2^1p^1q^1=\frac{2!}{1!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$$

Ймовірність виграти дві партії з чотирьох:

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Оскільки $P_2(1)>P_4(2)$, то ймовірніше виграти одну партію з двох.

б) Обчислимо ймовірність виграти не менше двох партій з чотирьох:

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}.$$

Отже, ймовірніше виграти не менше двох партій з чотирьох.

Задача 4.4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених дітей хлопчиків і дівчаток буде порівну.

Розв'язання. У даному випадку $n = 200$, $k = 100$, $p = 0,515$, $q = 1 - p = 0,485$.

Оскільки n і k достатньо великі, то застосовуємо локальну теорему Лапласа.

Знайдемо $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 200 \cdot 0,515}{\sqrt{200 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} \approx -0,424$.

За таблицею (див. дод. 1) знайдемо значення функції Гаусса: $\varphi(-0,424) = \varphi(0,424) = 0,3647$.

Тоді за формулою (5.6):

$$P_{200}(100) = \frac{\varphi(-0,424)}{\sqrt{200 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} = \frac{0,3647}{7,068} \approx 0,052.$$

Відповідь: 0,052.

Задача 5.5. Магазин отримав партію скляних пляшок молока. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка розіб'ється дорівнює $p = 0,06$. Скільки слід перевірити пляшок, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відносна частота появи розбитих пляшок відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01?

Розв'язання. Оскільки, $p = 0,06$, $q = 1 - p = 0,94$, $\varepsilon = 0,01$, то. $P\left(\left|\frac{k}{n} - 0,06\right| < 0,01\right) = 0,9973$. За формулою запишемо:

$$2\Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,06 \cdot 0,94}}\right) = 0,9973.$$

За таблицею (дод. 2) $\Phi(3) = 0,4986$, отже $0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,06 \cdot 0,94}} = 3$, $n = 5076$.

Відповідь: n=5076.

Задача 5.6. Підручник видано тиражем 10000 примірників. Ймовірність виготовлення бракованого примірника підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг.

Розв'язання. За умовою $n=10000$, $p=0,0001$, $k=5$. Оскільки n велике, а ймовірність p мала, і $\lambda = np = 1$, то за формулою Пуассона (5.5):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1e^{-1}}{5!} = \frac{0,369}{120} \approx 0,004.$$

Відповідь: 0,004.

Завдання для самостійного виконання

1. (2б.) У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей:

а) двоє дівчат;

б) не більше двох дівчат. Вважати ймовірність народження дівчинки рівною 0,49.

2. (1б.) Ймовірність банкрутства однієї з шести компаній на кінець року дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що на кінець року збанкротують не більше двох компаній.

3. (2б.) Кожне з семи підприємств харчової промисловості виконує місячний план з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в кінці місяця план виконають принаймні п'ять підприємств.

4. (1б.) Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Ймовірність того, що кожен із зразків буде придатний до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визначить придатними до продажу.

5. (2б.) Батарея провела 6 пострілів по воєнному об'єкту. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти:

а) найімовірніше число влучень;

б) ймовірність найімовірнішого числа влучень.

6. (1б.) Ймовірність появи події у кожному із 100 незалежних випробувань однакова і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться: а) не менше 75 разів і не більше 80; б) не більше 74 разів.

7. (1б.) При наборі довільного слова з тексту наборщик робить помилку з ймовірністю 0,001. Яка ймовірність того, що в набраній статті, яка має 3000 слів, буде не більше чотирьох помилок?

Критерії оцінювання практичного заняття

Тема: Повторні випробування

Максимальна кількість балів: 10

Завдання	**Що оцінюється**	**Критерії оцінювання**	**Бал**
Сім'я з п'яти дітей: ймовірність двох дівчат і не більше двох	Використання біноміального розподілу, правильний розрахунок ймовірності	2 б. – правильні обидва підпункти з розрахунками і поясненням;1,5 б. – правильні обидва підпункти без пояснення;1 б. – правильно розрахований один підпункт;0 б. –	2

Завдання	Що оцінюється	Критерії оцінювання	Бал
		неправильні обидва	
Ймовірність банкрутства не більше двох компаній	Застосування формули біноміального розподілу	1 б. – правильний розрахунок із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
Виконання плану принаймні п’ятьма підприємствами	Біноміальний розподіл, підсумовування ймовірностей	2 б. – правильний розрахунок із поясненням;1,5 б. – правильний результат без пояснень;1 б. – частково правильний результат;0 б. – неправильний	2
Найімовірніше число придатних зразків	Застосування формули для найбільш ймовірного значення у біноміальному розподілі	1 б. – правильний результат із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1
Влучення батареї: найімовірніше число влучень та ймовірність	Застосування біноміального розподілу та визначення найбільш ймовірного результату	2 б. – обидва підпункти правильні із поясненням;1,5 б. – обидва підпункти, без пояснення;1 б. – правильно один підпункт;0 б. – неправильний	2
Подія у 100 незалежних випробуваннях: ймовірність від певної кількості	Використання біноміального розподілу, підсумовування ймовірностей	1 б. – правильний розрахунок підпунктів а) і б) з поясненням;0,5 б. – результат без пояснень;0 б. – неправильний	1
Помилки наборщика: ймовірність ≤4 помилок	Застосування біноміального або пуассонівського наближення	1 б. – правильний розрахунок із поясненням;0,5 б. – правильний результат без пояснення;0 б. – неправильний	1

Пояснення

- Максимальна оцінка: **10 балів**.
- Завдання із підпунктами або складними розрахунками (1, 3, 5, 6) допускають часткову оцінку, якщо **результат правильний, але пояснення відсутнє**.
- Особливу увагу звертають на **логіку розрахунків і обґрунтування відповіді**.

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Тема 4. Випадкові величини

Мета вивчення: **с**формувати уявлення про випадкові величини, їхні типи (дискретні і неперервні), та функції розподілу; навчитися визначати та інтерпретувати ймовірності подій, пов'язаних з випадковими величинами.

Покращити аналітичні навички студентів, розвиваючи їхню здатність робити висновки на основі статистичних даних і ймовірнісних моделей.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)
   - Розв’язання задач.
   - Самостійна робота студентів.
   - Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.
5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- Що таке випадкова величина?
- Що називають функцією розподілу ймовірності випадкової величини?
- Яка випадкова величина називається дискретною?

3. Теоретична частина

1. Дискретна випадкова величина

Випадковою величиною *X* називають таку величину, яка в результаті випробування прийме лише одне з можливих значень наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які попередньо не можуть бути враховані.

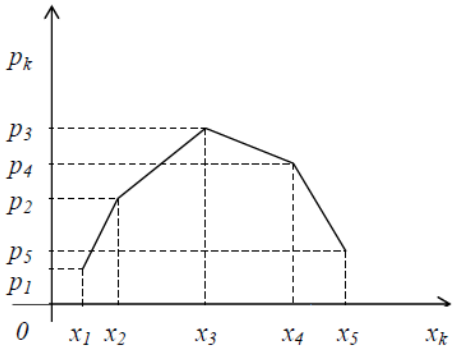
Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, яка приймає ізольовані числові значення із усіх можливих.

Закон розподілу дискретних випадкових величин може бути заданий такими способами.

1. ***Табличний.***

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . . ..	p_n

2. ***Графічний***. Закон розподілу, поданий у графічному вигляді, називається *многокутником розподілу*:



Тобто, *многокутник розподілу* це є ламана лінія, яка з'єднує точки з координатами , у порядку зростання індексів (x_k, p_k), $k = 1, 2, ...$.

3. ***Аналітичний*** закон розподілу полягає в тому, що дається математична формула, за якою можна обчислити ймовірності того, що випадкова величина прийме те чи інше значення.

Найважливішими є такі види дискретних розподілів: рівномірний, біноміальний, показниковий, геометричний.

Рівномірний розподіл – це розподіл випадкової величини, яка набуває *n* різних значень x_i з однаковими ймовірностями

$$p_i = \frac{1}{n}\text{, де } i=1, 2, 3, ..., n.$$

Наприклад, число очок, що випадають на верхній грані грального кубика, є дискретна випадкова величина, яка має такий рівномірний закон розподілу:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Біноміальний розподіл (розподіл Бернуллі) – це розподіл випадкової величини, яка набуває значення *i = 1, 2, 3, ..., n*, а ймовірності знаходяться з допомогою формули $p_i = C_n^i p^i q^{n-i}$.

Біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості «успіхів» у серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких «успіх» відбувається з ймовірністю p.

Показниковий розподіл (розподіл Пуассона) – це розподіл випадкової величини, яка набуває значень $k = 1, 2, 3, ..., n, \ldots$ а ймовірності знаходяться з допомогою формули $P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$, де $a = n \cdot p$.

З допомогою цього розподілу будуються математичні моделі роботи об'єктів обслуговування населення.

Геометричний розподіл – це розподіл випадкової величини, що набуває значень $k \in N$ з ймовірностями $p_i = p \cdot q^{k-1}$, де $k=1, 2, 3, ..., n, \ldots$ число p – фіксоване, а $q=1 - p$.

Геометричний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до першого «успіху» в серії незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p.

2. Неперервна випадкова величина

Неперервною випадковою величиною називають таку величину, яка набуває всі свої можливі значення з деякого проміжку.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

2.1. Інтегральна функція розподілу та її основні властивості

Інтегральною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, менше дійсного числа x, тобто:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (4.1)$$

Геометрично ця рівність пояснюється так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке зображується на числовій осі точкою, що знаходиться лівіше значення x.

Випадкову величину будемо називати неперервною, якщо її інтегральна функція розподілу $F(x)$ є неперервно диференційована.

Властивості інтегральної функції розподілу:

1. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ задовольняє таку нерівність:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Ця властивість випливає з означення інтегральної функції як імовірності події.

2. Інтегральна функція $F(x)$ не є спадною, тобто $F(x_1) \ge F(x_2)$, якщо $x_1 \ge x_2$.

3. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (a, b), дорівнює приросту інтегральної функції, тобто

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \qquad (4.2)$$

2.2. Диференціальна функція розподілу та її основні властивості

Диференціальною функцією розподілу *f(x)* або **щільністю ймовірностей** неперервної випадкової величини *X* називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F'(x). \qquad (4.3)$$

З цього означення випливає, що інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини *X* є первісною для диференціальної функції.

Знаючи інтегральну функцію розподілу *F(x)*, легко знайти диференціальну функцію *f(x)*, бо за означенням $f(x) = F'(x)$.

Знаючи диференціальну функцію *f(x)*, інтегральну функцію *F(x)* можна знайти за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \qquad (4.4)$$

2.3. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу (який, часто називають законом Гауса) виконує важливу роль в теорії ймовірностей і має серед інших законів розподілу особливе значення. Цей закон найчастіше трапляється на практиці. Важливою особливістю цього закону є те, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу, які почасти трапляються в ти пових умовах.

Нормальним законом розподілу випадкової величини *X* називають закон, диференціальна функція якого задається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}. \qquad (4.6)$$

Нормальний закон розподілу визначається двома параметрами: a і σ. Достатньо задати ці параметри, щоб задати нормальний закон розподілу.

Графік диференціальної функції нормального закону розподілу часто називають **нормальною кривою або кривою Гауса**.

Ймовірність попадання в заданий інтервал $(\alpha;\beta)$випадкової величини, розподіленої **за нормальним законом,** визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (4.7)$$

Завдання для самостійного виконання

1. *(2 бали)* Стрілець виконує три постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі $p = 0{,}4$. Випадкова величина ξ – кількість влучень. Побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу випадкової величини ξ.

2. *(1 бал)* Магазин отримав 5000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою дорівнює 0,0002. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, що визначає кількість розбитих пляшок та ймовірність того, що при транспортуванні виявиться три розбитих пляшки.

3. *(2 бали)* Друкарка набирає сторінку тексту із 3000 символів. При наборі тексту вона робить помилку з ймовірністю 0,002. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ, кількості помилок на сторінці тексту, та знайти ймовірність того, що їх буде більше чотирьох.

4. *(1 бал)* У лотереї випущено 1000 білетів. Розігруються: 1 виграш по 1000 грн, 4 – 500 грн, 5 – 400 грн, 10 – 1000 грн. Знайти закон розподілу вартості виграшів для володаря 1 лотерейного білету.

5. *(3 бали)* У задачах випадкову величину X задано інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Знайти:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{3}x & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

а) диференціальну функцію розподілу $f(x)$,

б) ймовірність того, що X набуває значення, що міститься в інтервалі $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$;

в) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

6. *(1 бал)* Закон розподілу випадкової величини набуває вигляду. Знайти інтегральну функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

X	3	6	7	8	9
P	0,15	0,18	0,36	0,21	0,10

Критерії оцінювання практичного заняття

Тема: Випадкові величини

Максимальна кількість балів: 10

№ завдання	Зміст завдання	Критерії оцінювання	Макс. бал
1	Побудова ряду розподілу та многокутника розподілу (3 постріли)	1 бал – правильно побудовано ряд розподілу випадкової величини; 1 бал – правильно побудовано многокутник розподілу	2
2	Розподіл кількості розбитих пляшок	0,5 бала – правильно побудовано ряд розподілу; 0,5 бала – правильно знайдено ймовірність трьох розбитих пляшок	1
3	Кількість помилок при наборі тексту	1 бал – правильно побудовано ряд розподілу випадкової величини; 1 бал – правильно обчислено ймовірність того, що помилок більше 4	2
4	Закон розподілу виграшу лотерейного білета	1 бал – правильно складено закон розподілу (враховано всі можливі значення, включно з нульовим виграшем)	1
5	Неперервна випадкова величина, задана F(x)	1 бал – правильно знайдено диференціальну функцію розподілу f(x); 1 бал – правильно обчислено ймовірність ($P(1/2 < X < 1)$); 1 бал – правильно побудовано графіки F(x) і f(x)	3
6	Побудова інтегральної функції розподілу	0,5 бала – правильно знайдено інтегральну функцію розподілу F(x); 0,5 бала – правильно побудовано її графік	1
Разом		**Максимальна кількість балів**	**10**

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Тема 5. Числові характеристики випадкових величин

Мета вивчення: сформувати навички розрахунку та інтерпретації числових характеристик випадкових величин (математичного сподівання, дисперсії, середньоквадратичного відхилення) на прикладах конкретних задач. Закріпити вміння аналізувати результати обчислень для прийняття практичних рішень.

План заняття:

1. Організаційний момент (5 хвилин)
2. Актуалізація опорних знань (10 хвилин)
3. Теоретична частина (15 хвилин)
4. Практична частина (50 хвилин)
   - Розв’язання задач.
   - Самостійна робота студентів.

- Розбір типових помилок: аналіз студентських відповідей, обговорення правильного підходу.

5. Підсумки заняття та рефлексія (10 хвилин)

Література:

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 232 с.
7. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
8. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

Хід виконання заняття:

1. Організаційний момент

- Привітання, перевірка присутності студентів.
- Ознайомлення з темою, метою та завданнями заняття.

2. Актуалізація опорних знань

- Фронтальне опитування:
  - Що таке випадкова величина?
  - Які числові характеристики випадкових величин ви знаєте?
  - Як вони пов’язані між собою?

3. Теоретична частина

До основних числових характеристик, які описують розподіл випадкової величини, належать математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, мода, медіана.

1. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх можливих значень цієї величини на відповідні імовірності та позначають ***M(X)***.

Нехай випадкова величина X задана табличним законом розподілу,

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . . ..	p_n

то математичне сподівання визначається формулою:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ ... + x_n \cdot p_n$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_n \cdot p_n \,. \qquad (5.1)$$

Приклад. Нехай ДВВ X задана рядом розподілу:

x_k	1	2	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Знайдемо математичне сподівання ДВВ за формулою (5.1):

M(X) = $1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 0,3 + 0,8 + 1,5 = 2,6.$ Отримане значення є середнім значенням випадкової величини .

Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначають ***D(X)***:

Для обчислення дисперсії застосовують формулу:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2. \qquad (5.3)$$

Приклад 5.5. Знайти дисперсію випадкової величини *X,* яка має такий закон розподілу

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання *M(X):*

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + \ 5 \cdot 0,3 = 3,5;$$

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,6 + \ 5^2 \cdot 0,3 = 13,3.$$

Дисперсію шукаємо за формулою (5.3):

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 13.3 - 3,5^2 = 1,05.$$

$$D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y) + n^2 D(X) + m^2 D(Y),$$

де

$$m = M(X), n = M(Y).$$

Приклад 5.6. Кубик підкидується 10 разів. Знайти математичне сподівання та дисперсію появи 6 очок на випавшій грані.

Розв'язання:

З умови задачі маємо $n = 10, p = \frac{1}{6}, q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Для того, щоб знайти математичне сподівання, скористаємося п'ятою властивістю математичного сподівання:

$$M(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Для того, щоб знайти дисперсію, використаємо п'яту властивістю дисперсії:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{18}.$$

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини X називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (5.4)$$

Модою $M_o(X)$ **дискретної випадкової величини** називають найімовірніше її значення в деякому околі цього значення.

Модою абсолютно неперервної випадкової величини є точка максимуму щільності розподілу.

Медіаною випадкової величини називається таке число $M_e(X)$, для якого виконується умова:

$$P\big(X < Me(X)\big) = P\big(X > Me(X)\big).$$

Медіана неперерваної випадкової величини X завжди існує, а якщо X має дискретний розподіл, то $M_e(X)$ може не існувати.

Приклад 5.7. Випадкова величина X має ряд розподілу, наведений у таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

Розв'язання.

Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою (5.1):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_n \cdot p_n = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2 = 2.$$

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за формулою (5.3):

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 - (M(X))^2;$$

$$D(X) = = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}6 + 3^2 \cdot 0{,}2 - 2^2 = 4{,}4 - 4 = 0{,}4.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X вирахуємо за формулою (5.4):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}633.$$

Мода і медіана дорівнюють

$$Mo(X) = Me(X) = 2.$$

Числові характеристики основних законів розподілу дискретних випадкових величин, мають такий вигляд.

1. ***Рівномірний розподіл з параметром n***

$$M(X) = \frac{n+1}{2}, D(X) = \frac{n^2-1}{12}, \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

2. ***Біноміальний розподіл з параметром n і p***

$$M(X) = n \cdot p, D(X) = n \cdot p \cdot (1-p), \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

3. ***Показниковий з параметром λ***

$$M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

4. ***Геометричний з параметром p***

$$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

5. ***Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей***

$$\mathrm{M(X)} = n \cdot \frac{K}{N}, D(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}, \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Приклад 5.8. Ймовірність влучення у мішень, що рухається, з пістолета дорівнює 0,001. Відбувається 2000 пострілів. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості влучень у мішень.

Розв'язання. Випадкової величини X має показниковий розподіл з параметром λ, який дорівнює $\lambda = n \cdot p$.

За умовою задачі $n = 2000,\ p = 0{,}001,$

тому

$$\lambda = 2000 \cdot 0{,}001 = 2.$$

Скористаємось формулами для знаходження числових характеристик основних законів розподілу дискретних випадкових величин. При показниковому розподілі:

$$M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Тому

$$M(X) = 2, D(X) = 2, \sigma(X) = \sqrt{2}.$$

2. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a, b]$, називають визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx. \qquad (5.5)$$

Якщо можливі значення випадкової величини X належать всій дійсній осі, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx. \qquad (5.6)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини, тобто якщо можливі значення належать відрізку $[a, b]$, то дисперсія визначається формулою:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 ; \qquad (5.9)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2. \qquad (5.10)$$

Середнє квадратичне відхилення, аналогічно як і для дискретної випадкової величини, визначається за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (5.11)$$

Приклад 5.9. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 2x & \text{при } 0 < x \le 1 ; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Математичне сподівання знаходимо за формулою (5.6):

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію визначаємо за формулою (5.9).
Підставивши значення, одержимо:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається формулою (5.11):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

1.2. Неперервний рівномірний розподіл

Нехай X – рівномірно розподілена на відрізку [a, b]неперервна випадкова величина, функція щільності якої:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \end{cases}$$

Математичне сподівання: M(X) = $\frac{a+b}{2}$

Дисперсія: D(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

2. Числові характеристики нормального закону розподілу

Нехай неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}.$$

Отже, **математичне сподівання нормального закону розподілу** дорівнює параметру a диференціальної функції розподілу

$$M(X) = a. \qquad (5.12)$$

$$D(X) = \sigma^2 \qquad (5.13)$$

Звідси:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} \qquad (5.14)$$

Відтак **середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини** X дорівнює параметру σ.

Ймовірність відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, від свого математичного сподівання шукається за формулою:

$$P\left(\left|X-a\right| < \alpha\right) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \qquad (5.15)$$

5. Числові характеристики показникового закону розподілу

Нехай неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

де λ – стала величина $\lambda > 0$.

Математичне сподівання:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсія:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси середнє квадратичне відхилення, як корінь квадратний із дисперсії, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ дорівнює:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (5.18)$$

Приклад 5.11. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 4e^{-4x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. У цьому разі випадкова величина X розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda = 4$.

Згідно з формулами (5.16), (5.17) та (5.18) маємо:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4};$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Завдання для самостійного виконання

1. *(2 бали)* Знайти за даним законом її розподілу:
   а) математичне сподівання;
   б) дисперсію;
   в) середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини.

X	2	6	9	12	15
P	0,27	0,33	0,13	0,11	0,16

2. *(2 бали)* На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожен з яких дозволяє або забороняє рух автомобіля з ймовірністю 0,5. Скласти ряд розподілу. Чому дорівнює математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?

3. *(1 бал)* У групі з 20 студентів троє відмінників. Випадково і за умови рівно-можливості вибирається 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

4. *(1 бал)* Підручник видано тиражем 10000 примірників. Ймовірність того, що зброшурований екземпляр виявиться неякісним, дорівнює 0,001. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості неякісних екземплярів.

5. *(2 бали)* Випадкову величину X задано інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Знайти:
   а) диференціальну функцію розподілу $f(x)$,
   б) математичне сподівання і дисперсію X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

6. *(1 бал)* Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 5e^{-5x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

7. *(1 бал)* Нормально розподілена випадкова величина має математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Записати диференціальну функцію її розподілу, якщо $M(X) = -1$, $D(X) = 9$.

Критерії оцінювання практичного заняття
Тема: Числові характеристики випадкових величин
Максимальна кількість балів: 10

№ завдання	Зміст завдання	Критерії оцінювання	Макс. бал
1	Числові характеристики дискретної ВВ за відомим законом розподілу	1 бал – правильно знайдено математичне сподівання; 0,5 бала – правильно обчислено дисперсію; 0,5 бала – правильно знайдено середнє квадратичне відхилення	2
2	Біноміальний розподіл (6 світлофорів)	1 бал – правильно складено ряд розподілу; 0,5 бала – правильно знайдено математичне сподівання; 0,5 бала – правильно знайдено дисперсію	2
3	Гіпергеометричний розподіл (відбір студентів)	1 бал – правильно знайдено числові характеристики випадкової величини	1
4	Розподіл Пуассона (неякісні примірники)	1 бал – правильно знайдено математичне сподівання та дисперсію	1
5	Неперервна ВВ, задана F(x)	1 бал – правильно знайдено диференціальну функцію розподілу f(x); 1 бал – правильно знайдено математичне сподівання та дисперсію	2
6	Числові характеристики за заданим законом розподілу	1 бал – правильно знайдено математичне сподівання та дисперсію	1
7	Нормальний розподіл	1 бал – правильно записано диференціальну функцію нормального розподілу з заданими параметрами	1
Разом		**Максимальна кількість балів**	**10**

В кінці роботи виставляється сумарна кількість балів, яку набрав студент (студентка).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Базова

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021. 184 с.
2. Вигоднер, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Херсон: Олді-плюс, 2025. 336 с.
3. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
4. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
5. Литвин, І. І. Вища математика : навч. посіб: 2-ге вид. К.: ЦУЛ, 2020.368 с.
6. Литвинов А. Л. Вища та прикладна математика з інформаційних технологій (теорія ймовірностей, математична статистика, математичне програмування, управління запасами) : навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2021. 232 с.
7. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2020. 292 с.

2. Допоміжна

8. Нарихнюк Н. Ю. Роль теорії ймовірностей та математичної статистики у навчанні студентів комп’ютерних наук. *Цифрові інструменти у сучасній освіті: матеріали доповідей (статей, тез) учасників/учасниць ІІІ наук.-практ. інтернет-конф.* (м. Луцьк, 26 листопада 2024). Луцьк: КЗВО «Луцький педагогічний коледж». 2024. С. 156-165.
9. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2017. 221 с..
10. Коваленко, Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : Навч. посіб. Х. : ХНУМГ, 2019. 233 с.
11. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос. Львів: Новий світ - 2000, 2021. 382 с.
12. Юрченко М. О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" частина 1 для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 65 с.
13. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.
14. Юрченко М.О. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 46 с.

ДОДАТКИ

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3988	3986	3989	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3952	3845	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0794	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,1	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,2	0001	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,01	0,4778	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,02	0,4783	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,03	0,4788	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,04	0,4793	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,05	0,4798	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,06	0,4803	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,07	0,4808	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,08	0,4812	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,09	0,4817	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,10	0,4821	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,11	0,4826	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,12	0,4830	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,13	0,4834	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,14	0,4838	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,15	0,4842	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,16	0,4846	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,17	0,4850	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,19	0,4857	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,20	0,4861	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,21	0,4864	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3888	1,72	0,4573	2,22	0,4868	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,23	0,4871	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,74	0,2704	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,24	0,4875	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,25	0,4878	3,00	0,4987
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,05	0,4989
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,27	0,4884	3,10	0,49903
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,28	0,4887	3,15	0,49918
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,29	0,4890	3,20	0,49931
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,25	0,49942
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,31	0,4896	3,30	0,49952
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,35	0,49960
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,33	0,4901	3,40	0,49966
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,50	0,49977
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,35	0,4906	3,60	0,49984
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,70	0,49989
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,37	0,4911	3,80	0,499928
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,38	0,4913	3,90	0,499952
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,39	0,4916	4,00	0,499968
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,40	0,4918	4,20	0,499987
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,41	0,4920	4,40	0,4999946
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,42	0,4922	4,60	0,4999979
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,43	0,4925	4,80	0,4999992
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,44	0,4927	5,00	0,4999997
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,45	0,4929		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,46	0,4931		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,47	0,4932		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,48	0,4934		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,49	0,4936		

Таблиця значень функції Пуассона $P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005
m \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002
m \ λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0940	1008
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0139	0163	0188	0216
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008
11	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0002
m \ λ	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
0	0,0498	0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	1494	1057	0733	0500	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	2240	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	2240	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	1680	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	1008	1322	1563	1708	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0504	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0216	0385	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0081	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0027	0066	0132	0232	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0008	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11	0002	0007	0019	0043	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12	0001	0002	0006	0016	0034	0113	0263	0481	0728	0948
13	0000	0001	0002	0006	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0001	0002	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15	0000	0000	0000	0001	0002	0009	0033	0090	0194	0347
16	0000	0000	0000	0000	0000	0003	0014	0045	0109	0217
17	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0006	0021	0058	0128
18	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0009	0029	0071
19	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004	0014	0037
20	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0006	0019
21	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0003	0009
22	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004

Таблиця значень функції $t_\alpha = t(\alpha; n)$

n \ α	0,95	0,99	0,999	n \ α	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень функції $q = q(\alpha; n)$

n \ α	0,95	0,99	0,999	n \ α	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу Стьюдента

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	1021	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	249	2,79	3,45	3,73
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	202	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					

Критичні точки розподілу χ^2

Кількість ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,73	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

Критичні точки розподілу *F* Фішера–Снедекора

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,88	2,82
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,86	2,80
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,84	2,78
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,82	2,76
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,79	2,72
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,77	2,71
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,75	2,69
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,74	2,68
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
41	7,30	5,16	4,30	3,81	3,50	3,28	3,11	2,98	2,87	2,79	2,71	2,65

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,70	2,64
43	7,26	5,14	4,27	3,79	3,48	3,25	3,09	2,96	2,85	2,76	2,69	2,63
44	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,68	2,62
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61
46	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,66	2,60
47	7,21	5,09	4,23	3,75	3,43	3,21	3,05	2,92	2,81	2,72	2,65	2,59
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91	2,80	2,71	2,64	2,58
49	7,18	5,07	4,21	3,73	3,42	3,19	3,03	2,90	2,79	2,71	2,63	2,57
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	3,53	2,47
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45
75	6,99	4,90	4,05	3,58	3,27	3,05	2,89	2,76	2,65	2,57	2,49	2,43
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42
85	6,94	4,86	4,02	3,55	3,24	3,02	2,86	2,73	2,62	2,54	2,46	2,40
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39
95	6,91	4,84	3,99	3,52	3,22	3,00	2,83	2,70	2,60	2,51	2,44	2,38
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2.55	2,47	2,39	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,37	2,31
175	6,78	4,73	3,90	3,43	3,12	2,91	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,29
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,24
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,68	2,56	245	2,37	2,29	2,23
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22
700	6,67	4,64	3,81	3,35	3,04	2,83	2,66	2,54	2,43	2,35	2,27	2,21
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2.20
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	6143	6170	6209	6234	6260	6286	6302	6324	6334	6350	6360	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,28	26,24	26,18	26,15	26,13
4	14,25	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,69	13,61	13,58	13,52	13,49	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,24	9,29	9,17	9,13	9,08	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,93	6,90	6,88
7	6,36	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,79	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,01	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,74	3,71	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,50	3,47	3,41	3,38	3,36
13	3,86	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,31	3,27	3,22	3,19	3,17
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,22	3,14	3,11	3,06	3,03	3,00
15	3,56	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,01	2,98	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,90	2,86	2,81	2,78	2,75
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,80	2,76	2,71	2,68	2,65
18	3,27	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,64	2,60	2,55	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,57	2,54	2,48	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,58	2,51	2,48	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,36	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,37	2,33	2,27	2,24	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,33	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,29	2,25	2,19	2,16	2,13
27	2,82	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,26	2,22	2,16	2,12	2,10
28	2,79	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,23	2,19	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,27	2,20	2,16	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,13	2,07	2,03	2,01
31	2,72	2,64	2,52	2,45	2,36	2,27	2,22	2,14	2,11	2,04	2,01	1,98
32	2,70	2,62	2,50	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
33	2,68	2,60	2,48	2,40	2,32	2,23	2,18	2,10	2,06	2,00	1,96	1,93
34	2,66	2,58	2,46	2,38	2,30	2,21	2,16	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
35	2,64	2,56	2,44	2,36	2,28	2,19	2,14	2,06	2,02	1,96	1,92	1,89
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,18	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
37	2,61	2,53	2,41	2,33	2,25	2,16	2,10	2,03	1,98	1,92	1,88	1,85
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,23	2,14	2,09	2,01	1,97	1,90	1,86	1,84
39	2,58	2,50	2,38	2,30	2,22	2,13	2,07	1,99	1,95	1,89	1,85	1,82
40	2,56	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,98	1,94	1,87	1,83	1,80
41	2,55	2,47	2,36	2,28	2,19	2,10	2,04	1,97	1,92	1,86	1,82	1,79

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
42	2,54	2,46	2,34	2,26	2,18	2,09	2,03	1,95	1,91	1,85	1,80	1,78
43	2,53	2,45	2,33	2,25	2,17	2,08	2,02	1,94	1,90	1,83	1,79	1,76
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,07	2,01	1,93	1,89	1,82	1,78	1,75
45	2,51	2,43	2,31	2,23	2,14	2,05	2,00	1,92	1,88	1,81	1,77	1,74
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,99	1,91	1,86	1,80	1,76	1,73
47	2,49	2,41	2,29	2,21	2,12	2,03	1,98	1,90	1,85	1,79	1,74	1,71
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,12	2,02	1,97	1,89	1,84	1,78	1,73	1,70
49	2,47	2,39	2,27	2,19	2,11	2,02	1,96	1,88	1,83	1,77	1,72	1,69
50	2,46	2,38	2,27	2,18	2,10	2,01	1,95	1,87	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,42	2,34	2,23	2,15	2,06	1,97	1,91	1,83	1,78	1,71	1,67	1,64
60	2,39	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,79	1,75	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,29	2,17	2,09	2,00	1,91	1,85	1,77	1,72	1,65	1,60	1,57
70	2,35	2,27	2,15	2,07	1,98	1,89	1,83	1,74	1,70	1,62	1,57	1,54
75	2,33	2,25	2,13	2,05	1,96	1,87	1,81	1,72	1,67	1,60	1,55	1,52
80	2,31	2,23	2,12	2,03	1,94	1,85	1,79	1,70	1,65	1,58	1,53	1,49
85	2,30	2,22	2,10	2,02	1,93	1,83	1,77	7,69	1,64	1,56	1,51	1,47
90	2,29	2,21	2,09	2,00	1,92	1,82	1,76	1,67	1,62	1,55	1,49	1,46
95	2,28	2,20	2,08	1,99	1,90	1,81	1,75	1,66	1,61	1,53	1,48	1,44
100	2,27	2,19	2,07	1,98	1,89	1,80	1,74	1,65	1,60	1,52	1,47	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,76	1,69	1,60	1,55	1,47	1,41	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,92	1,83	1,73	1,66	1,57	1,52	1,43	1,38	1,33
175	2,19	2,10	1,98	1,90	1,81	1,71	1,64	1,55	1,50	1,41	1,35	1,30
200	2,17	2,09	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
300	2,14	2,06	1,94	1,85	1,76	1,66	1,59	1,50	1,44	1,35	1,28	1,22
400	2,13	2,05	1,92	1,84	1,75	1,64	1,58	1,48	1,42	1,32	1,25	1,19
500	2,12	2,04	1,92	1,83	1,74	1,63	1,57	1,47	1,41	1,31	1,23	1,16
600	2,11	2,03	1,91	1,82	1,73	1,63	1,56	1,46	1,40	1,30	1,22	1,15
700	2,11	2,03	1,90	1,82	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,21	1,14
800	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,20	1,13
1000	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,08	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,42	1,36	1,25	1,15	1,00

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	316	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88
85	3,95	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,12	2,05	1,99	1,94	1,90	1,87
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,86
95	3,94	3,09	2,70	2,47	2,31	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,86
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
175	3,90	3,05	2,66	2,42	2,27	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,84	1,81
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,82	1,78
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77
600	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,80	1,77
700	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,77
800	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,41	4,39	4,37	4,37
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,53	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23
8	3,24	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93
9	3,03	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,42	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,37	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88
20	2,22	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,93	1,91	1,88	1,86	1,84
21	2,20	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,90	1,88	1,84	1,83	1,81
22	2,17	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	1,78
23	2,15	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73
25	2,11	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71
26	2,09	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69
27	2,08	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,75	1,73	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,70	1,66	1,64	1,62
31	2,03	1,98	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,70	1,68	1,65	1,62	1,61
32	2,01	1,97	1,91	1,86	1,82	1,77	1,74	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59
33	2,00	1,96	1,90	1,85	1,81	1,76	1,72	1,68	1,66	1,62	1,60	1,58
34	1,99	1,95	1,89	1,84	1,80	1,75	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	1,57
35	1,99	1,94	1,88	1,83	1,79	1,74	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57	1,56
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
37	1,97	1,93	1,86	1,82	1,77	1,72	1,68	1,64	1,62	1,58	1,55	1,54
38	1,96	1,92	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,63	1,61	1,57	1,54	1,53
39	1,95	1,91	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,62	1,60	1,56	1,53	1,52
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
41	1,94	1,90	1,83	1,79	1,74	1,69	1,65	1,61	1,58	1,54	1,52	1,50

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
42	1,94	1,89	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,60	1,57	1,53	1,51	1,49
43	1,93	1,89	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,59	1,57	1,53	1,50	1,48
44	1,92	1,88	1,81	1,77	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,52	1,49	1,48
45	1,92	1,87	1,81	1,76	1,71	1,66	1,63	1,58	1,55	1,51	1,49	1,47
46	1,91	1,87	1,80	1,76	1,71	1,65	1,62	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46
47	1,91	1,86	1,80	1,75	1,70	1,65	1,61	1,57	1,54	1,50	1,47	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45
49	1,90	1,85	1,79	1,74	1,69	1,64	1,60	1,56	1,53	1,49	1,46	1,44
50	1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,53	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,51	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,45	1,40	1,37	1,35
75	1,83	1,78	1,71	1,66	1,61	1,55	1,52	1,47	1,44	1,39	1,36	1,34
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32
85	1,81	1,76	1,70	1,65	1,59	1,54	1,50	1,45	1,42	1,37	1,34	1,31
90	1,80	1,75	1,68	1,64	1,59	1,53	1,49	1,44	1,41	1,36	1,33	1,30
95	1,80	1,75	1,68	1,63	1,58	1,52	1,48	1,43	1,40	1,35	1,32	1,29
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28
125	1,77	1,73	1,66	1,60	1,55	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,48	1,4	1,38	1,34	1,29	1,25	1,22
175	1,75	1,70	1,63	1,58	1,52	1,46	1,42	1,36	1,33	1,27	1,23	1,20
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
300	1,72	1,68	1,61	1,5	1,50	1,43	1,39	1,33	1,30	1,23	1,19	1,15
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,17	1,13
500	1,71	1,6	1,59	1,54	1,48	1,42	1,38	1,31	1,28	1,21	1,16	1,11
600	1,71	1,6	1,59	1,54	1,48	1,41	1,37	1,31	1,27	1,20	1,15	1,10
700	1,71	1,66	1,59	1,53	1,48	1,41	1,37	1,30	1,27	1,20	1,15	1,09
800	1,70	1,6	1,58	1,53	1,47	1,41	1,37	1,30	1,26	1,20	1,14	1,09
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

ЗМІСТ

Передмова……..……..……... 3
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1…… 4
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2……....11
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3…….……..19
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4……...28
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5……..….35
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6……...41
Список використаних джерел……...…52
Додатки……..…53